

HYPERBOLINEN GEOMETRIA

Tehtävät 7.9. alkavalle viikolle

- (1) Tarkastele seuraavia Riemannin pallon osajoukkoja. Selvitä mitkä osajoukoista ovat avoimia, mitkä suljettuja ja mitkä eivät ole avoimia eivätkä suljettuja.

- (a) $U_1 = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z > 3\}$
- (b) $U_2 = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z \geq \operatorname{Re} z^2\}$
- (c) $U_3 = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z \neq 5\}$
- (d) $U_4 = \{z \in \mathbb{C} \mid 1 \leq \operatorname{Re} z \leq 7, 0 < \operatorname{Im} z < 9\}$
- (e) $U_5 = \{\infty\} \cup U_1$
- (f) $U_6 = \{\infty\} \cup \{z \in \mathbb{C} \mid |z| > 6\}$
- (g) $U_7 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 3\}$
- (h) $U_8 = U_6 \cup U_7$

- (2) Määritä seuraavien joukkojen sulkeumat ja reunat Riemannin pallolla $\overline{\mathbb{C}}$.

- (a) $V_1 = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z < 5\}$
- (b) $V_2 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 2\}$
- (c) $V_3 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 2\}$
- (d) $V_4 = V_2 \setminus \{i\}$
- (e) $V_5 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| > 7\}$
- (f) $V_6 = V_5 \cup \{\infty\}$

- (3) Olkoot

- (a) $V_1 = \{z \in \mathbb{H} \mid |z| \leq 1\}$
- (b) $V_2 = \{z \in \mathbb{H} \mid |z| > 2\}$
- (c) $V_3 = \{z \in \mathbb{H} \mid |z - i2| < 1\}$
- (d) $V_4 = \{x + iy \mid x, y \in \mathbb{R}, x > -2, y = x + 2\}$

ylemmän puolitason \mathbb{H} osajoukkoja. Määritä joukkojen V_1, \dots, V_4 reunat äärettömydessä.

- (4) Olkoon $J: \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}, z \mapsto \frac{1}{z}$ ja olkoon

$$C = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - 1| = 2\}.$$

Tällöin C on ympyrä kompleksitasossa ja myös

$$J(C) = \{J(z) \in \mathbb{C} \mid |z - 1| = 2\}$$

on kompleksitason ympyrä. Määritä ympyrän $J(C)$ yhtälö ja piirrä ympyrät C ja $J(C)$ kompleksitasoon.

- (5) Olkoon $\xi: \mathbb{S}^2 \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ stereografinen projektio. Olkoon P yhtälön $x+y+z = 1$ määrittelemä taso avaruudessa \mathbb{R}^3 . Määritä kuva $\xi(P \cap \mathbb{S}^2)$.