HYPERBOLINEN GEOMETRIA

Ratkaisut, harjoitus 4

(1) (a) Koska D_s on origokeskinen kiekko, jonka hyperbolinen säde on s, se on myös euklidinen origokeskinen kiekko ja sen euklidinen säde on $R = \tanh(\frac{s}{2})$. Niinpä kiekon D_s hyperbolinen pinta-ala on

$$A_{\mathbb{D}}(D_s) = \int_0^{2\pi} \int_0^R \frac{4r}{(1-r^2)^2} dr d\theta = 2\pi \int_0^R (-2)(-2r)(1-r^2)^{-2} dr.$$

Yllä oleva integraali on

$$4\pi \Big|_0^R (1-r^2)^{-1} = 4\pi\Big(\frac{1}{1-R^2} - 1) = \frac{4\pi R^2}{1-R^2}.$$

Sijoittamalla $R = \tanh(\frac{s}{2})$ saadaan

$$4\pi\Big(\frac{1}{1-R^2} - 1) = 4\pi \frac{\tanh^2(\frac{s}{2})}{1-\tanh^2(\frac{s}{2})} = 4\pi \frac{\sinh^2(\frac{s}{2})}{\cosh^2(\frac{s}{2}) - \sinh^2(\frac{s}{2})}.$$

Koska $\cosh^2(\frac{s}{2}) - \sinh^2(\frac{s}{2}) = 1$, on

$$A_{\mathbb{D}}(D_s) = 4\pi \sinh^2(\frac{s}{2}).$$

(b) Parametrisoidaan kiekon D_s reuna kuvauksen f avulla, missä

$$f\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{D}, \ \ t \mapsto Re^{it}.$$

Polun f hyperbolinen pituus on

$$L_{\mathbb{D}}(f) = \int_0^{2\pi} \frac{2|f'(t)|}{1-|f(t)|^2} dt = \int_0^{2\pi} \frac{2R}{1-R^2} dt.$$

Siis

$$L_{\mathbb{D}}(f) = \frac{4\pi R}{1-R^2} = 4\pi \frac{\tanh(\frac{s}{2})}{1-\tanh^2(\frac{s}{2})} = 4\pi \sinh(\frac{s}{2}) \cosh(\frac{s}{2}).$$

Koska $\sinh(2x) = 2\sinh(x)\cosh(x)$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$, on

$$L_{\mathbb{D}}(f) = 2\pi \sinh(s).$$

Date: October 1, 2015.

(2) Napakoordinaatteja käyttäen suoran $\mathrm{Re}z = \mathrm{Im}z$ ensimmäisessä neljänneksessä oleva osa voidaan kirjoittaa muodossa $\theta = \frac{\pi}{4}$. Samaten suoran $\mathrm{Re}z = \sqrt{3}\mathrm{Im}z$ voidaan kirjoittaa muodossa $\theta = \frac{\pi}{6}$. Alueen R rajoiksi saadaan: $\frac{\pi}{6} < \theta < \frac{\pi}{4}$ ja $\frac{1}{3} < r < \frac{1}{2}$. Niinpä alueen R hyperbolinen pinta-ala on

$$A_{\mathbb{D}}(R) = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} \frac{4r}{(1-r^2)^2} dr d\theta = (\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}) 2 \Big|_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} (1-r^2)^{-1} = \frac{5\pi}{144}.$$

(3) Olkoon

$$C = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - \frac{1}{2}| = \frac{1}{6}\}$$

Poincarén kiekon euklidinen ympyrä. Etsitään ympyrän C hyperbolinen keskipiste ja säde. Olkoon $|x - \frac{1}{2}| = \frac{1}{6}$. Tällöin $x - \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$ tai $x - \frac{1}{2} = -\frac{1}{6}$, joten ympyrän C leikkauspisteet reaaliakselin kanssa ovat $x_1 = \frac{1}{3}$ ja $x_2 = \frac{2}{3}$. Pisteitten x_1 ja x_2 hyperboliset etäisyydet origosta ovat

$$d_{\mathbb{D}}(x_1, 0) = d_{\mathbb{D}}(0, \frac{1}{3}) = \ln\Big(\frac{1+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}\Big) = \ln 2$$

ja

$$d_{\mathbb{D}}(x_2, 0) = d_{\mathbb{D}}(0, \frac{2}{3}) = \ln\Big(\frac{1+\frac{2}{3}}{1-\frac{2}{3}}\Big) = \ln 5.$$

Olkoon x_0 ympyrän C hyperbolinen keskipiste. Kuvaus $\gamma\colon \mathbb{D} \to \mathbb{D}$, $z \mapsto \bar{z}$ on Poincarén kiekon isometria ja $\gamma(C) = C$. Niinpä täytyy olla $\gamma(x_0) = x_0$ eli $x_0 \in \mathbb{R}$.

Koska reaaliakseli on Poincarén kiekon geodeesi ja $x_0, x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, pätee pisteitten x_0, $x_1 = \frac{1}{3}$ ja $x_2 = \frac{2}{3}$ etäisyyksille origosta

$$d_{\mathbb{D}}(0, x_0) = d_{\mathbb{D}}(0, \frac{1}{3}) + d_{\mathbb{D}}(\frac{1}{3}, x_0)$$

ja

$$d_{\mathbb{D}}(0, \frac{2}{3}) = d_{\mathbb{D}}(0, x_0) + d_{\mathbb{D}}(x_0, \frac{2}{3}),$$

missä

$$d_{\mathbb{D}}(\frac{1}{3}, x_0) = d_{\mathbb{D}}(x_0, \frac{2}{3}).$$

Niinpä

$$d_{\mathbb{D}}(0, x_0) = \frac{1}{2}\Big(d_{\mathbb{D}}(0, \frac{1}{3}) + d_{\mathbb{D}}(0, \frac{2}{3})\Big) = \frac{1}{2}(\ln 5 + \ln 2) = \ln \sqrt{10}.$$

Toisaalta

$$d_{\mathbb{D}}(0, x_0) = \ln \frac{1+x_0}{1-x_0},$$

joten

$$\frac{1+x_0}{1-x_0} = \sqrt{10},$$

mistä ratkaisemalla saadaan, että ympyrän C hyperbolinen keskipiste on

$$x_0 = \frac{\sqrt{10}-1}{\sqrt{10}+1}.$$

Ympyrän C hyperbolinen säde on

$$d_{\mathbb{D}}(\frac{1}{3}, x_0) = d_{\mathbb{D}}(0, x_0) - d_{\mathbb{D}}(0, \frac{1}{3}) = \ln\sqrt{10} - \ln 2 = \ln(\frac{\sqrt{10}}{2}).$$

(4) Olkoon C Poincarén kiekon origokeskinen ympyrä. Olkoon r ympyrän C euklidinen säde. Koska ympyrä kulkee pisteen r kautta, on sen hyperbolinen säde $\ln\frac{1+r}{1-r}$. Osoitamme, että

$$r < \ln\frac{1+r}{1-r},$$

kaikilla $r \in (0,1)$. Olkoon

$$f\colon [0,1) \to \mathbb{R}, \quad r \mapsto r - \ln\frac{1+r}{1-r}.$$

Tällöin f on differentioituva kuvaus ja

$$f'(r) = 1 - \frac{2}{1-r^2}.$$

Niinpä $f'(r) = 0$ jos ja vain jos $r^2 = -1$, mikä ei ole mahdollista. Pisteessä $\frac{1}{2}$,

$$f'(\frac{1}{2}) = 1 - \frac{8}{3} < 0,$$

joten $f'(r) < 0$ kaikilla $r \in (0,1)$, mistä seuraa, että f on vähenevä kuvaus välilla $[0,1)$. Pisteessä 0 pätee $f(0) = 0$. Niinpä $f(r) < 0$ kaikilla $r \in (0,1)$, joten

$$r < \ln\frac{1+r}{1-r},$$

kaikilla $r \in (0,1)$.

(5) (a) Kolmion Δ_1 kärjet ovat pisteissä 0, 2 ja ∞, joten sen jokainen kulma on 0. Niinpä

$$A_{\mathbb{H}}(\Delta_1) = \pi - 3 \cdot 0 = \pi.$$

(b) Kolmion Δ_2 kärjistä yksi on pisteessä ∞, joten sitä vastaava kulma on 0. Muut kärjet ovat yksikköympyrällä ja niitä vastaavat kulmat ovat kumpikin $\frac{\pi}{4}$. Niinpä

$$A_{\mathbb{H}}(\Delta_2) = \pi - 2 \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}.$$

(c) Olkoon Δ_a kolmio, jonka kärjet ovat pisteissä $(1, \sqrt{3})$, $(-1, \sqrt{3})$ ja ∞. Olkoon Δ_b kolmio, jonka kärjet ovat pisteissä 1, -1 ja ∞. Kolmion Δ_a kulmat ovat $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{3}$ ja 0. Kolmion Δ_b jokainen kulma on 0. Niinpä

$$A_{\mathbb{H}}(P_1) = A_{\mathbb{H}}(\Delta_b) - A_{\mathbb{H}}(\Delta_a) = \pi - (\pi - 2 \cdot \frac{\pi}{3}) = \frac{2\pi}{3}.$$

(d) Monikulmio P_2 voidaan esittää yhdisteenä viidestä kolmiosta, joiden sisäpisteitten joukot eivät leikkaa toisiaan ja joiden kaikki kärjet ovat reunalla $\partial\mathbb{H}$. Jokaisen tällaisen kolmion hyperbolinen pinta-ala on π. Niinpä $A_{\mathbb{H}}(P_2) = 5\pi$.