HYPERBOLINEN GEOMETRIA

Ratkaisut, harjoitus 2

(1) (a) Kuvat käytiin läpi harjoituksissa.
(b) Kuvasta nähdään, että hyperboliset suorat l_1, l_2 ja l_3 ovat yhdensuuntaisia hyperbolisen suoran l kanssa.
(c) Olkoon $z \in l \cap l_4$. Koska $z \in l_4$, on $|z - 0| = 2$. Niinpä $z = 2e^{i\varphi}$, jollain $\varphi \in [0, 2\pi)$. Koska $z \in l$, on

$$|2e^{i\varphi} - 1| = |2\cos\varphi - 1 + i2\sin\varphi| = 2.$$

Niinpä

$$(2\cos\varphi - 1)^2 + (2\sin\varphi)^2 = 4,$$

mistä seuraa, että

$$\cos\varphi = \frac{1}{4}.$$

Koska piste z on ylemmässä puolitasossa, on

$$\sin\varphi = \sqrt{1 - (\frac{1}{4})^2} = \frac{\sqrt{15}}{4}.$$

Niinpä suorien leikkauspiste on $z = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{15}}{2}$.

(2) (a) Olkoon $\sigma_1 \colon [0,1] \to \mathbb{H}$, $\sigma_1(t) = e^t + i2e^t$. Tällöin $\mathrm{Im}\sigma_1(t) = 2e^t$ ja $\sigma_1'(t) = e^t + i2e^t$. Niinpä

$$|\sigma_1'(t)| = \sqrt{(e^t)^2 + 4(e^t)^2} = \sqrt{5}e^t.$$

Polun σ_1 hyperbolinen pituus on

$$L_{\mathbb{H}}(\sigma_1) = \int_0^1 \frac{1}{2e^t}\sqrt{5}e^t dt = \frac{\sqrt{5}}{2}\int_0^1 dt = \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

(b) Olkoon $\sigma_2 \colon [0,5] \to \mathbb{H}$, $\sigma_2(t) = t + i\cosh(t)$. Tällöin

$$\mathrm{Im}\sigma_2(t) = \cosh t = \frac{e^t + e^{-t}}{2}$$

ja

$$\sigma_2'(t) = 1 + i\sinh t = 1 + i(\frac{e^t - e^{-t}}{2}).$$

Niinpä

$$|\sigma_2'(t)| = \sqrt{1 + \sinh^2 t} = \sqrt{\cosh^2 t} = \cosh t.$$

Date: September 16, 2015.

Polun σ_2 hyperbolinen pituus on

$$L_{\mathbb{H}}(\sigma_2) = \int_0^5 \frac{1}{\cosh t} \cosh t dt = 5.$$

(c) Olkoon $\sigma_3 \colon [e^3, e^5] \to \mathbb{H}$, $\sigma_3(t) = 1 + i\ln(t)$. Tällöin $\mathrm{Im}\sigma_3(t) = \ln t$ ja $\sigma_3'(t) = i\frac{1}{t}$. Niinpä Niinpä $|\sigma_3'(t)| = \frac{1}{t}$. Polun σ_3 hyperbolinen pituus on

$$L_{\mathbb{H}}(\sigma_3) = \int_{e^3}^{e^5} \frac{1}{\ln t}\frac{1}{t} dt = \Big|_{e^3}^{e^5} \ln(\ln t) = \ln 5 - \ln 3 = \ln\frac{5}{3}.$$

(3) (a) Olkoon $\gamma \colon \mathbb{H} \to \mathbb{H}$, $z \mapsto z - 1$. Tällöin γ on ylemmän puolitason Möbius-kuvaus, joten se on isometria. Niinpä

$$d_{\mathbb{H}}(1+i, 1+3i) = d_{\mathbb{H}}(\gamma(1+i), \gamma(1+3i)) = d_{\mathbb{H}}(i, 3i) = \ln\frac{3,}{1} = \ln 3.$$

(b) Olkoot $z = -2 + i$ ja $w = 2 + i$. Tällöin

$$\cosh(d_{\mathbb{H}}(z, w)) = 1 + \frac{|z-w|^2}{2\mathrm{Im}z\mathrm{Im}w} = 1 + \frac{4^2}{2 \cdot 1 \cdot 1} = 9.$$

Niinpä

$$d_{\mathbb{H}}(z, w) = \ln(9 + \sqrt{9^2 - 1}) = \ln(9 + \sqrt{80}).$$

(c) Olkoon $\gamma \colon \mathbb{H} \to \mathbb{H}$, $z \mapsto z - 3$. Tällöin γ on ylemmän puolitason Möbius-kuvaus, joten se on isometria. Niinpä

$$d_{\mathbb{H}}(1+i, 5+i) = d_{\mathbb{H}}(-2+i, 2+i) = \ln(9 + \sqrt{80}).$$

(4) Olkoon $\gamma \colon \mathbb{H} \to \mathbb{H}$, $z \mapsto -\bar{z}$ (eli γ on tehtävässä määritelty kuvaus). Tällöin $(\gamma \circ \gamma)(z) = z$ kaikilla $z \in \mathbb{H}$. Niinpä γ on bijektio ja sen käänteiskuvaus on $\gamma^{-1} = \gamma$. Selvästi γ on jatkuva kuvaus. Niinpä se on homeomorfismi.

Olkoot $z_1, z_2 \in \mathbb{H}$. Olkoon $\sigma \colon [0, 1] \to \mathbb{H}$ mielivaltainen polku pisteestä z_1 pisteeseen z_2. Tällöin $\gamma \circ \sigma$ on polku pisteestä $\gamma(z_1)$ pisteeseen $\gamma(z_2)$. Edelleen kaikki polut pisteestä $\gamma(z_1)$ pisteeseen $\gamma(z_2)$ saadaan tällä tavoin, koska γ on homeomorfismi. Niinpä riittää osoittaa, että polkujen $\gamma \circ \sigma$ ja σ hyperboliset pituudet ovat samat kun halutaan näyttää, että $d_{\mathbb{H}}(\gamma(z_1), \gamma(z_2)) = d_{\mathbb{H}}(z_1, z_2)$. Voidaan olettaa, että σ on differentioituva. (Jos σ on ainoastaan paloittain differentioituva, lasketaan polkujen σ ja $\gamma \circ \sigma$ differentioituvien osapolkujen pituudet ja huomataan, että tällöinkin poluilla σ ja $\gamma \circ \sigma$ on sama pituus.)

Kirjoitetaan $\sigma(t) = x(t) + iy(t)$. Tällöin $(\gamma \circ \sigma)(t) = -x(t) + iy(t)$. Niinpä $\mathrm{Im}(\gamma \circ \sigma)(t) = y(t) = \mathrm{Im}(\sigma)(t)$ ja $(\gamma \circ \sigma)'(t) = -x'(t) + iy'(t)$, joten

$$|(\gamma \circ \sigma)'(t)| = ((-x'(t))^2 + (y'(t))^2)^{\frac{1}{2}} = |\sigma'(t)|.$$

Niinpä

$$\begin{aligned} L_{\mathbb{H}}(\gamma \circ \sigma) &= \int \frac{|(\gamma\circ\sigma)'(t)|}{\mathrm{Im}(\gamma\circ\sigma)(t)} dt \\ &= \int \frac{|\sigma'(t)|}{\mathrm{Im}(\sigma(\mathrm{t}))} dt \\ &= L_{\mathbb{H}}(\sigma). \end{aligned}$$

Tämän perusteella $d_{\mathbb{H}}(\gamma(z_1), \gamma(z_2)) = d_{\mathbb{H}}(z_1, z_2)$. Niinpä γ on isometria, koska pisteet z_1 ja z_2 valittiin mielivaltaisesti.

(5) Olkoot $z, w \in \mathbb{H}$ ja olkoon $d_{\mathbb{H}}(z, w)$ pisteitten z ja w välinen hyperbolinen etäisyys. Osoitetaan, että

$$\tanh(\frac{1}{2} d_{\mathbb{H}}(z, w)) = \frac{|z - w|}{|z - \bar{w}|},$$

missä $\bar{w}$ on kompleksiluvun w liittoluku.

Olkoon γ ylemmän puolitason Möbius-kuvaus. Tällöin on olemassa reaaliluvut a, b, c, d, joille $ad - bc > 0$ ja

$$\gamma(q) = \frac{aq + b}{cq + d}$$

kaikilla $q \in \mathbb{H}$. Luentojen Lemman 5.13 perusteella

$$|\gamma(q) - \gamma(p)| = |q - p||\gamma'(q)|^{\frac{1}{2}}|\gamma'(p)|^{\frac{1}{2}}$$

kaikilla $p, q \in \mathbb{H}$, missä

$$\gamma'(z) = \frac{ad - cb}{(cz + d)^2}.$$

Huomaa, että $\bar{w} \notin \mathbb{H}$, koska $w \in \mathbb{H}$. Määritellään kuvaus γ samalla kaavalla myös alemmassa puolitasossa:

$$\gamma(\bar{w}) = \frac{a\bar{w} + b}{c\bar{w} + d}.$$

Tällöin $\overline{\gamma(w)} = \gamma(\bar{w})$. Huomaa, että Lemman 5.13 väite pätee vaikka toinen tai molemmat pisteet olisivat alemmassa puolitasossa ja että $|\gamma'(w)| = |\gamma'(\bar{w})|$. Niinpä

$$\frac{|\gamma(z) - \gamma(w)|}{|\gamma(z) - \gamma(\bar{w})|} = \frac{|z - w||\gamma'(z)|^{\frac{1}{2}}|\gamma'(w)|^{\frac{1}{2}}}{|z - \bar{w}||\gamma'(z)|^{\frac{1}{2}}|\gamma'(\bar{w})|^{\frac{1}{2}}} = \frac{|z - w|}{|z - \bar{w}|}.$$

Luentojen Lemman 5.7 perusteella on olemassa ylemmän puolitason Möbius-kuvaus γ, joka kuvaa pisteet z ja w imaginääriakselille. Olkoot $u = \mathrm{Im}(\gamma(z))$ ja $v = \mathrm{Im}(\gamma(w))$. Oletetaan, että $u > v$. Tällöin luentojen Lauseen 5.5 perusteella $d_{\mathbb{H}}(u, v) = \ln(\frac{u}{v})$.

Kaikilla reaaliluvuilla x pätee

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^x}.$$

Koska γ on isometria, pätee

$$\begin{aligned}\tanh(\tfrac{1}{2}d_{\mathbb{H}}(z,w)) &= \tanh(\tfrac{1}{2}d_{\mathbb{H}}(\gamma(z),\gamma(w)))) = \tanh(\tfrac{1}{2}d_{\mathbb{H}}(iu,iv))) \\ &= \tanh(\tfrac{1}{2}\ln\tfrac{u}{v}) = \tanh(\ln(\tfrac{\sqrt{u}}{\sqrt{v}}) = \frac{\frac{\sqrt{u}}{\sqrt{v}}-\frac{\sqrt{v}}{\sqrt{u}}}{\frac{\sqrt{u}}{\sqrt{v}}+\frac{\sqrt{v}}{\sqrt{u}}} \\ &= \tfrac{u-v}{u+v} = |\tfrac{u-v}{u+v}| = \tfrac{|\gamma(z)-\gamma(w)|}{|\gamma(z)-\gamma(\bar{w})|} = \tfrac{|z-w|}{|z-\bar{w}|}.\end{aligned}$$