

## HYPERBOLINEN GEOMETRIA

Tehtävät 9.11. alkavalle viikolle

- (1) Olkoot  $p, q \in \mathbb{Z}$ ,  $q \neq 0$ . Olkoon  $\gamma \in \text{Möb}(\mathbb{H})$ ,

$$\gamma(z) = \frac{(1 + pq)z - p^2}{q^2z + (1 - pq)}.$$

Osoita, että  $\gamma \in \text{PSL}(2; \mathbb{Z})$ . Etsi kuvauksen  $\gamma$  kiintopisteet ja osoita, että

$$\Lambda(\text{PSL}(2; \mathbb{Z})) = \partial\mathbb{H}.$$

- (2) Etsi sellaiset Fuchsin ryhmät  $\Gamma_0$ ,  $\Gamma_1$ ,  $\Gamma_2$  ja  $\Gamma_\infty$ , että ryhmän  $\Gamma_j$  kasautumispisteitten joukossa  $\Lambda(\Gamma_j)$  on täsmälleen  $j$  alkiota kun  $j = 0, 1, 2$  tai  $\infty$ .

- (3) Olkoon  $G$  ryhmä ja olkoon  $\gamma \in G$ . Olkoon  $H$  ryhmän  $G$  aliryhmä.

(a) Osoita, että alkion  $\gamma$  keskittäjä  $C_G(\gamma)$  ryhmässä  $G$  on ryhmän  $G$  aliryhmä.

(b) Osoita, että ryhmän  $H$  normalisoija  $N_G(H)$  on ryhmän  $G$  aliryhmä.

- (4) Olkoon  $\gamma$  ylemmän puolitason hyperbolinen Möbius-kuvaus,  $\gamma(z) = kz$ , missä  $k > 0$ ,  $k \neq 1$ . Osoita, että kuvauksen  $\gamma$  keskittäjä

$$C_{\text{Möb}(\mathbb{H})}(\gamma) = \{\gamma' \mid \gamma'(z) = \lambda z, \lambda > 0\}.$$

- (5) Olkoon  $\gamma$  Poincarén kiekon elliptinen Möbius-kuvaus,  $\gamma(z) = e^{i2\pi\theta}z$ , missä  $\theta \in (0, 1)$ . Osoita, että kuvauksen  $\gamma$  keskittäjä ryhmässä  $\text{Möb}(\mathbb{D})$  on kaikkien origon ympäri suoritettavien kiertojen muodostama ryhmä.