JOHDATUS HYPERBOLISEEN GEOMETRIAAN

Sisältö

1. Euklidisen avaruuden geometriaa

Euklidinen etäisyys

Olkoot $x = (x_1, x_2)$ ja $y = (y_1, y_2)$ tason $\mathbb{R}^2$ pisteitä. Pisteitten x ja y euklidinen etäisyys on

$$d(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}.$$

Kuvausta

$$d\colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto d(x, y),$$

sanotaan tason $\mathbb{R}^2$ *euklidiseksi metriikaksi*. Kaikille $x, y, z \in \mathbb{R}^2$ pätee:

(1) $d(x, y) \geq 0$,
(2) $d(x, y) = 0$ jos ja vain jos $x = y$,
(3) $d(x, y) = d(y, x)$
(4) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Viimeisestä ominaisuudesta käytetään nimitystä *kolmioepäyhtälö*.

Tason euklidisessa geometriassa siis kahden pisteen välistä etäisyyttä voidaan ajatella niitä yhdistävän janan (erikoistapaus polusta) pituutena. Tämä on hyvä lähtökohta, kun halutaan tutkia pisteitten välisiä etäisyyksiä eri geometrioissa. Hyperbolisessa geometriassa määrittelemme ensin hyperbolisen pituuden poluille. Kahden pisteen välinen etäisyys on sitten minimi näitä pisteitä yhdistävien polkujen pituuksista. Hyperbolinen etäisyys määrittelee hyperbolisen metriikan. Osoitamme, että mitä tahansa kahta pistettä yhdistää yksikäsitteinen lyhin polku. Hyperbolisessa geometriassa lyhimmät pisteitten väliset polut voivat olla kovin erilaisia kuin euklidisessa geometriassa. Käytämme niistä nimitystä *geodeesi*.

Euklidisen tason isometriat ja isometriaryhmä

Ryhmä G on joukko, jossa on määritelty laskutoimitus. Toisin sanoen, yhdistämällä kaksi ryhmän alkiota saadaan uusi ryhmän alkio. Laskutoimitukselle pätee:

(1) liitännäisyys: $(gh)k = g(hk)$ kaikilla $g, h, k \in G$,
(2) neutraalialkion olemassaolo: ryhmässä G on alkio e, jolle $eg = ge = g$ kaikilla $g \in G$,
(3) käänteisalkion olemassaolo: kaikilla $g \in G$ on olemassa $g^{-1} \in G$, jolle $gg^{-1} = g^{-1}g = e$.

Date: 4. joulukuuta 2015.

Ryhmän G osajoukkoa H sanotaan ryhmän G *aliryhmäksi*, jos H on myös ryhmä (varustettuna laskutoimituksella, jonka se perii ryhmältä G).

Isometrialla tarkoitetaan kuvausta, joka säilyttää etäisyydet. Seuraavat ovat esimerkkejä euklidisen tason $\mathbb{R}^2$ isometrioista:

(1) identiteettikuvaus $e(x, y) = (x, y)$,
(2) yhdensuuntaissiirto (eli translaatio) $\tau_{(a,b)}(x, y) = (x + a, y + b)$, missä $a, b \in \mathbb{R}$,
(3) tason kierto (eli rotaatio),
(4) peilaus suoran suhteen.

Olkoon $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ isometria. Olkoot $x, y \in \mathbb{R}^2$ ja oletetaan, että $f(x) = f(y)$. Tällöin

$$d(x, y) = d(f(x), f(y)) = 0,$$

joten $x = y$. Niinpä f on injektio. Seuraavaksi todistamme, että f on myös surjektio:

Lemma 1.1. *Olkoon $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ euklidisen tason isometria. Tällöin f on surjektio.*

Todistus. Oletetaan ensin, että $f(0) = 0$. Olkoon

$$B_r = B_r(0) = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \leq r\}$$

suljettu kiekko, jonka keskipiste on origo ja säde r. Osoitetaan, että $f(B_r) = B_r$ kaikilla $r > 0$. Tästä seuraa, että f on surjektio. Olkoon x mielivaltainen joukon B_r piste. Tällöin $\|x - 0\| \leq r$. Koska f on isometria ja $f(0) = 0$, seuraa tästä, että

$$\|f(x) - 0\| = \|f(x) - f(0)\| \leq r.$$

Siispä $f(x) \in B_r$. Koska x valittiin mielivaltaisesti, voidaan päätellä, että $f(B_r) \subset B_r$.

Oletetaan sitten, että $f(B_r) \neq B_r$. Tällöin on olemassa $x_0 \in B_r \setminus f(B_r)$. Konstruoidaan seuraavaksi jono joukon $f(B_r)$ pisteitä:

$$x_1 = f(x_0),\ \ x_2 = f(x_1), \ldots, x_i = f(x_{i-1}), \cdots$$

Kuvaus f on jatkuva ja B_r on kompakti, joten myös $f(B_r)$ on kompakti. Niinpä (x_i) on jono kompaktin joukon $f(B_r)$ pisteitä, joten sillä on suppeneva osajono. Koska $x_0 \notin f(B_r)$, on

$$\lambda = d(x_0, f(B_r)) = \inf\{d(x_0, y) \mid y \in f(B_r)\} > 0.$$

Olkoon $i < j$. Tällöin

$$d(x_i, x_j) = d(x_0, x_{j-i}) \geq \lambda,$$

koska $x_{j-i} \in f(B_r)$. Tästä seuraa, että jonolla (x_i) ei voi olla suppenevaa osajonoa, joten päädymme ristiriitaan. Niinpä oletus $f(B_r) \neq B_r$ on väärä ja $f(B_r) = B_r$.

Oletetaan sitten, että $f(0) = a \neq 0$. Olkoon

$$T_{-a}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ \ x \mapsto x - a,$$

tason siirto. Tällöin T_{-a} on isometria ja myös yhdistetty kuvaus $T_{-a} \circ f$ on isometria. Kuvaukselle $T_{-a} \circ f$ pätee $(T_{-a} \circ f)(0) = 0$. Edellisen tapauksen perusteella $T_{-a} \circ f$ on surjektio. Niinpä myös

$$f = (T_a \circ T_{-a}) \circ f = T_a \circ (T_{-a} \circ f)$$

on kahden surjektion yhdisteenä surjektio. □

Koska isometriat ovat myös injektioita, olemme todistaneet seuraavan tuloksen:

Teoreema 1.2. *Tason $\mathbb{R}^2$ euklidiset isometriat ovat bijektioita.*

Euklidisen tason $\mathbb{R}^2$ isometriat siis ovat bijektioita. Myös niiden käänteiskuvaukset ovat isometrioita. Niinpä ne muodostavat ryhmän $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2)$, laskutoimituksena kuvausten yhdistäminen.

Harjoitustehtävä 1.3.

Olkoon R_θ 2×2-matriisi, joka kiertää tason $\mathbb{R}^2$ kulman $\theta \in [0, 2\pi)$ verran origon ympäri. Niinpä

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Olkoon $a = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$. Olkoon

$$T_{\theta,a} \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}.$$

Niinpä $T_{\theta,a}$ ensin kiertää pisteen (x, y) origon ympäri kulman θ verran ja sitten siirtää sen yhdensuuntaissiirrolla vektorin a verran.

Olkoon $G = \{T_{\theta,a} \mid \theta \in [0, 2\pi), a \in \mathbb{R}^2\}$.

(1) Olkoot $\theta, \phi \in [0, 2\pi)$ ja olkoot $a, b \in \mathbb{R}^2$. Osoita, että yhdistetty kuvaus $T_{\theta,a} \circ T_{\phi,b}$ on muotoa $T_{\gamma,c}$, missä $\gamma \in [0, 2\pi)$ ja $c \in \mathbb{R}^2$. Osoita, että G on ryhmä kuvausten yhdistämisen suhteen.
(2) Osoita, että tason kierrot origon ympäri muodostavat ryhmän G aliryhmän.
(3) Osoita, että tason yhdensuuntaissiirrot muodostavat ryhmän G aliryhmän.

Euklidisen tason laatoitukset

Säännöllinen n-kulmio on monikulmio, jolla on n samanpituista sivua ja jonka kaikki kulmat ovat yhtä suuria. Lisäksi kaikki sivut ovat geodeeseja. Niinpä säännöllinen 3-kulmio on tasasivuinen kolmio ja säännöllinen 4-kulmio on neliö. Euklidisen tason *laatoituksella* eli *tessellaatiolla* tarkoitetaan tason peittämistä kuvioilla, jotka eivät mene päällekkäin. Euklidinen taso voidaan laatoittaa kolmella eri tavalla käyttäen samankokoisia säännöllisiä monikulmioita. Tällä tavoin saadaan tasasivuisista kolmioista, neliöistä ja säännöllisistä kuusikulmioista koostuvat laatoitukset. Laatoitusten suhteen hyperbolinen geometria poikkeaa suuresti euklidisesta geometriasta: on olemassa äärettömän monta eri tapaa laatoittaa hyperbolinen taso säännöllisillä hyperbolisilla monikulmioilla!

2. Riemannin pallo

Lisätään kompleksitasoon yksi ylimääräinen piste, josta käytetään merkintää ∞. Näin saatu yhdiste $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ on *Riemannin pallo*.

Olkoon X kompleksitason osajoukko. Jos kaikilla $z \in X$ on olemassa sellainen $\varepsilon > 0$, että

$$U_\varepsilon(z) = \{w \in \mathbb{C} \mid |w - z| < \varepsilon\} \subset X,$$

sanotaan joukkoa X kompleksitason *avoimeksi* osajoukoksi. Vastaavasti sanotaan, että joukko $X \subset \mathbb{C}$ on kompleksitason *suljettu* osajoukko, jos sen komplementti $\mathbb{C} \setminus X$ on avoin.

Joukkoa $X \subset \mathbb{C}$ sanotaan *rajoitetuksi*, jos on olemassa sellainen $\varepsilon > 0$, että $X \subset U_\varepsilon(0)$.

Seuraavaksi määrittelemme vastaavat käsitteet Riemannin pallolle. Olkoon $\varepsilon > 0$. Määritellään joukko $U_\varepsilon(\infty)$ seuraavasti:

$$U_\varepsilon(\infty) = \{w \in \mathbb{C} \mid |w| > \varepsilon\} \cup \{\infty\}.$$

Määritelmä 2.1. Riemannin pallon $\overline{\mathbb{C}}$ osajoukko X on *avoin*, jos kaikilla $x \in X$ on olemassa sellainen $\varepsilon > 0$, että $U_\varepsilon(x) \subset X$. Joukko $X \subset \overline{\mathbb{C}}$ on *suljettu*, jos sen komplementti on avoin.

Määritelmästä 2.1 seuraa välittömästi, että kompleksitason avoimet osajoukot ovat avoimia myös Riemannin pallossa.

Esimerkki 2.2. Olkoon

$$E = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| > 1\} \cup \{\infty\} = U_1(\infty).$$

Näytämme, että kaikilla $z \in E$ on olemassa sellainen $\varepsilon > 0$, että $U_\varepsilon(z) \subset E$. Koska $E = U_1(\infty)$, voidaan pisteelle $z = \infty$ valita $\varepsilon = 1$. Pisteelle $z \in E \setminus \{\infty\}$ puolestaan pätee, että $U_\varepsilon(z) \subset E$ kaikilla $\varepsilon \in (0, |z| - 1)$. Niinpä E on Riemannin pallon avoin osajoukko. Vastaavasti yksikköympyrä $\mathbb{S}^1$ on Riemannin pallon suljettu osajoukko, koska sen komplementti

$$\overline{\mathbb{C}} \setminus \mathbb{S}^1 = U_1(0) \cup U_1(\infty)$$

on avoin.

Riemannin pallo on esimerkki *yhden pisteen kompaktisoinnista*.

Jonon suppeneminen Riemannin pallolla voidaan määritellä kuten jonon suppeminen kompleksitasossa: Olkoon (z_n) jono Riemannin pallon pisteitä. Sanomme, että jono (z_n) *suppenee* kohti pistettä $z \in \overline{\mathbb{C}}$, jos jokaista positiivista reaalilukua ε kohti on olemassa sellainen $N > 0$, että $z_n \in U_\varepsilon(z)$ kaikilla $n > N$.

Harjoitustehtävä 2.3.

Osoita, että jono $(\frac{1}{n})_{n=1}^{\infty}$ suppenee kohti origoa ja että jono $(n)_{n=1}^{\infty}$ suppenee kohti pistettä ∞.

Olkoon $X \subset \overline{\mathbb{C}}$. Joukon X *sulkeuma* Riemannin pallolla on

$$\overline{X} = \{z \in \overline{\mathbb{C}} \mid U_\varepsilon(z) \cap X \neq \emptyset \text{ kaikilla } \varepsilon > 0\}$$

ja sen *reuna* on $\overline{X} \cap \overline{(\overline{\mathbb{C}} \setminus X)}$.

Harjoitustehtävä 2.4.

Määritä joukkojen $X = \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\}$ ja $Y = \{a + ib \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$ sulkeumat Riemannin pallolla.

Määritelmä 2.5. Olkoon $C \subset \overline{\mathbb{C}}$. Sanomme, että C on Riemannin pallon *ympyrä*, jos C on joko kompleksitason euklidinen ympyrä tai kompleksitason euklidisen suoran ja joukon $\{\infty\}$ yhdiste.

Stereografinen projektio

Samastetaan taso $\mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}^3$ kompleksitason $\mathbb{C}$ kanssa, jolloin piste $(x, y, 0)$ vastaa pistettä $x + iy$. Olkoon

$$\mathbb{S}^2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$$

avaruuden $\mathbb{R}^3$ *yksikköpallo*. Määritellään kuvaus

$$\xi \colon \mathbb{S}^2 \to \overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$$

seuraavasti:

$$\xi(N) = \infty,$$

missä $N = (0, 0, 1)$ on yksikköpallon $\mathbb{S}^2$ pohjoisnapa, ja

$$\xi(x, y, z) = (\frac{x}{1 - z}, \frac{y}{1 - z}, 0),$$

jos $(x, y, z) \neq N$.

Huomaa seuraava: Olkoon $P \in \mathbb{S}^2$, $P \neq N$. Olkoon L_P avaruuden $\mathbb{R}^3$ euklidinen suora, joka kulkee pisteitten N ja P kautta. Tällöin $\xi(P)$ on suoran L_P ja xy-tason leikkauspiste.

Kuvaus ξ on bijektio. Sen käänteiskuvaus on $\xi^{-1} \colon \overline{\mathbb{C}} \to \mathbb{S}^2$, jolle $\xi^{-1}(\infty) = N$ ja

$$\xi^{-1}(x + iy) = (\frac{2x}{|z|^2 + 1}, \frac{2y}{|z|^2 + 1}, \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1}),$$

jos $x + iy \in \mathbb{C}$. Sekä ξ että ξ^{-1} ovat jatkuvia, joten ξ on *homeomorfismi*. Kuvausta ξ sanotaan Riemannin pallon *stereografiseksi projektioksi* kompleksitasolle.

Kompleksitason suorista ja ympyröistä

Tarkastellaan yhtälöä

$$A(x^2 + y^2) + 2\beta x + 2\gamma y + C = 0, \qquad (*)$$

missä $A, \beta, \gamma, C \in \mathbb{R}$. Yhtälön ratkaisujoukko on joko taso, ympyrä, suora, piste tai tyhjä joukko. Kirjoitetaan $z = x + iy$, $\bar{z} = x - iy$, $B = \beta + i\gamma$, jolloin

$$x = \frac{z + \bar{z}}{2} \text{ ja } y = \frac{z - \bar{z}}{2i}.$$

Yhtälö $(*)$ voidaan kirjoittaa muodossa

$$Az\bar{z} + 2\beta\frac{z + \bar{z}}{2} + 2\gamma\frac{z - \bar{z}}{2i} + C = 0.$$

Sieventämällä saadaan:

$$Az\bar{z} + \bar{B}z + B\bar{z} + C = 0.$$

Oletetaan ensin, että $A \neq 0$ ja kerrotaan yllä oleva yhtälö vakiolla A. Saadaan

$$A^2 z\bar{z} + A\bar{B}z + AB\bar{z} + AC = 0.$$

Tämä on yhtäpitävää sen kanssa, että

$$|Az + B|^2 - B\bar{B} = (Az + B)(A\bar{z} + \bar{B}) - B\bar{B} = -AC.$$

Edelleen yhtäpitävästi

$$|Az + B|^2 = |B|^2 - AC. \qquad (**)$$

Yhtälö $(**)$ on ympyrän yhtälö täsmälleen silloin, kun $|B|^2 - AC > 0$.

Oletetaan seuraavaksi, että $A = 0$. Tällöin yhtälö $(*)$ sieventyy muotoon

$$\bar{B}z + B\bar{z} + C = 0.$$

Kun kirjoitetaan $B = \beta + i\gamma$ ja $z = x + iy$, yhtälö saadaan muotoon

$$2\beta x + 2\gamma y = -C. \qquad (***)$$

Yhtälö $(***)$ on suoran yhtälö, jos ja vain jos $B = \beta + i\gamma \neq 0$, eli jos ja vain jos, $|B|^2 > 0 = AC$.

Yllä olevan perusteella

$$A(x^2 + y^2) + 2\beta x + 2\gamma y + C = 0$$

on suoran tai ympyrän yhtälö, jos ja vain jos $|B|^2 > AC$.

Olkoon P avaruuden $\mathbb{R}^3$ taso, jonka yhtälö on

$$\alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 z + \alpha = 0,$$

missä $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha \in \mathbb{R}$. Tason P leikkaus yksikköpallon $\mathbb{S}^2$ kanssa on joko tyhjä joukko, piste tai ympyrä. Leikkaus $P \cap \mathbb{S}^2$ on ympyrä täsmälleen silloin kun origon etäisyys tasosta P on < 1. Palautetaan mieliin, että pisteen $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ etäisyys tasosta P on

$$\frac{|\alpha_1 x_0 + \alpha_2 y_0 + \alpha_3 z_0 + \alpha|}{\sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2}},$$

joten origon etäisyys tasosta P on

$$\frac{|\alpha|}{\sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2}}.$$

Haluamme, että

$$\frac{|\alpha|}{\sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2}} < 1.$$

Tarkastellaan tasoa

$$P\colon \alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 z + \alpha = 0,$$

missä $\alpha_1 = 2\beta$, $\alpha_2 = 2\gamma$, $\alpha_3 = A - C$ ja $\alpha = A + C$. Tällöin leikkaus $P \cap \mathbb{S}^2$ on ympyrä täsmälleen silloin kun

$$(A + C)^2 = \alpha^2 < \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 = 4\beta^2 + 4\gamma^2 + (A - C)^2.$$

Yhtäpitävästi

$$AC < \beta^2 + \gamma^2 = |B|^2,$$

missä $B = \beta + i\gamma$.

Lause 2.6. (1) *Jos C on kompleksitason $\mathbb{C}$ ympyrä, niin $\xi^{-1}(C)$ on pallon $\mathbb{S}^2$ ympyrä, $N \notin \xi^{-1}(C)$.*

(2) *Jos L on kompleksitason $\mathbb{C}$ suora, niin $\xi^{-1}(L \cup \{\infty\}) = \xi^{-1}(L) \cup \{N\}$ on pallon $\mathbb{S}^2$ ympyrä.*

(3) *Jos C on pallon $\mathbb{S}^2$ ympyrä ja $N \in C$, niin $\xi(C)$ on kompleksitason suoran ja joukon $\{\infty\}$ yhdiste.*

(4) *Jos C on pallon $\mathbb{S}^2$ ympyrä ja $N \notin C$, niin $\xi(C)$ on kompleksitason $\mathbb{C}$ ympyrä.*

Siis: Joukko C on Riemannin pallon $\overline{\mathbb{C}}$ ympyrä, jos ja vain jos $\xi^{-1}(C)$ on pallon $\mathbb{S}^2$ ympyrä.

Todistus. Olkoon $U \subset \mathbb{S}^2$. Oletetaan, että $\xi(U)$ on Riemannin pallon ympyrä. Tällöin on olemassa $A, C \in \mathbb{R}$ ja $B \in \mathbb{C}$, joille $|B|^2 > AC$ ja joukon U pisteitä ovat täsmälleen ne (x, y, z), joille pätee

$$A\xi(x,y,z)\bar{\xi}(x,y,z) + \bar{B}\xi(x,y,z) + B\bar{\xi}(x,y,z) + C = 0. \qquad (\circ)$$

Olkoon $B = \beta + i\gamma$, jolloin $\bar{B} = \beta - i\gamma$. Koska

$$\xi(x,y,z) = \frac{x+iy}{1-z} \text{ ja } x^2 + y^2 + z^2 = 1,$$

on

$$\frac{x+iy}{1-z} \cdot \frac{x-iy}{1-z} = \frac{1+z}{1-z}.$$

Niinpä yhtälö $(\circ)$ voidaan kirjoittaa muotoon

$$A\frac{1+z}{1-z} + (\beta - i\gamma)\frac{x+iy}{1-z} + (\beta + i\gamma)\frac{x-iy}{1-z} + C = 0.$$

Yhtäpitävästi

$$2\beta x + 2\gamma y + (A - C)z + A + C = 0. \qquad (\circ\circ)$$

Yhtälö $(\circ\circ)$ on avaruuden $\mathbb{R}^3$ tason yhtälö, käytetään tälle tasolle merkintää P. Siis pätee

$$U = \{(x,y,z) \in \mathbb{S}^2 \mid 2\beta x + 2\gamma y + (A - C)z + A + C = 0\}$$

ja $U = P \cap \mathbb{S}^2$ on ympyrä, koska $|B|^2 > AC$. Niinpä U on yksikköpallon $\mathbb{S}^2$ ympyrä, jos $\xi(U)$ on Riemannin pallon ympyrä. Samoin nähdään, että jos $\xi(U)$ on Riemannin pallon ympyrä, niin U on yksikköpallon ympyrä. □

3. Pituus ja etäisyys hyperbolisessa geometriassa

Ylempi puolitaso

Hyperbolinen geometria voidaan konstruoida useilla eri tavoilla. Näitä tapoja kutsutaan *malleiksi*. Yksi tärkeistä malleista on *ylemmän puolitason malli*.

Määritelmä 3.1. Ylempi puolitaso $\mathbb{H}$ on niiden kompleksilukujen joukko, joiden imaginääriosa on positiivinen: $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) > 0\}$.

Määritelmä 3.2. Ylemmän puolitason $\mathbb{H}$ *reuna äärettömyydessä* on

$$\partial\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) = 0\} \cup \{\infty\}.$$

Ylemmän puolitason reunalle äärettömyydessä käytetään myös merkintää $\overline{\mathbb{R}}$. Yleisemmin voidaan määritellä ylemmän puolitason osajoukon X reuna äärettömyydessä: Olkoon $\overline{X}$ joukon X sulkeuma Riemannin pallolla. Joukon X reunalla äärettömyydessä tarkoitetaan leikkausta $\overline{X} \cap \overline{\mathbb{R}}$.

Polkuintegraalit

Jatkuvaa kuvausta $\delta\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ (tai $[a,b] \to \mathbb{R}^2$) sanotaan *poluksi kompleksitasossa*. Pisteitä $\delta(a)$ ja $\delta(b)$ sanotaan polun δ päätepisteiksi. Usein myös kuvaa $\delta([a,b])$ sanotaan poluksi ja kuvausta δ sanotaan polun *parametrisoinniksi*.

Esimerkki 3.3. Olkoot $\delta_1\colon [0,1] \to \mathbb{C}$, $t \mapsto t + it$ ja $\delta_2\colon [0,1] \to \mathbb{C}$, $t \mapsto t^2 + it^2$. Tällöin δ_1 ja δ_2 ovat saman polun parametrisointeja. Molemmat kuvaukset parametrisoivat euklidisen janan origosta pisteeseen $1 + i$.

Polkua $\delta\colon [a,b] \to \mathbb{R}^2$ sanotaan differentioituvaksi (tai C^1-poluksi), jos sillä on jatkuva derivaatta avoimella välillä (a,b). Koordinaattien avulla voimme kirjoittaa $\delta(t) = (x(t), y(t))$, missä kuvaukset $x(t)$ ja $y(t)$ ovat jatkuvia välillä $[a,b]$ ja niillä on jatkuvat derivaatat välillä (a,b). Polun δ euklidinen pituus on

$$L(\delta) = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\,dt.$$

Samastetaan kompleksitaso $\mathbb{C}$ euklidisen tason $\mathbb{R}^2$ kanssa. Tällöin $\delta(t) = x(t) + iy(t)$ ja $\delta'(t) = x'(t) + iy'(t)$. Edelleen

$$|\delta'(t)| = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2},$$

joten polun δ pituus voidaan kirjoittaa muodossa

$$L(\delta) = \int_a^b |\delta'(t)|\,dt.$$

Olkoon sitten $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ jatkuva kuvaus. Kuvauksen f *polkuintegraali* polkua δ pitkin on

$$\int_\delta f = \int_a^b f(\delta(t))|\delta'(t)|\,dt.$$

Huomautus 3.4. Voidaksemme laskea kuvauksen f integraalin polkua δ pitkin, meidän täytyy valita parametrisointi polulle δ. Voidaan näyttää, että polkuintegraali $\int_\delta f$ ei riipu polun δ parametrisoinnista.

Harjoitustehtävä 3.5.

Tarkastellaan parametrisaatioita

(1) $\delta_1 \colon [0,2] \to \mathbb{C},\ \ t \mapsto t + i,$
(2) $\delta_2 \colon [1,2] \to \mathbb{C},\ \ t \mapsto (t^2 - t) + i.$

Näytä, että nämä parametrisoinnit määrittelevät saman polun δ. Olkoon $f(z) = \mathrm{Im}(z)$. Laske polkuintegraali $\int_\delta f$ kumpaakin parametrisaatiota käyttäen.

Määritelmä 3.6. Polkua $\delta \colon [a,b] \to \mathbb{C}$ sanotaan *paloittain differentioituvaksi*, jos se on jatkuva koko välillä $[a,b]$ ja differentioituva muualla paitsi äärellisen monessa pisteessä.

Integraali $\int_\delta f$ paloittain differentioituvaa polkua δ pitkin lasketaan seuraavasti: Polku δ esitetään äärellisen monen differentioituvan polun yhdisteenä. Lasketaan kuvauksen f polkuintegraali näitä differentioituvia osapolkuja pitkin ja lasketaan yhteen saadut polkuintegraalit.

Etäisyys hyperbolisessa geometriassa

Seuraavaksi määrittelemme metriikan ylempään puolitasoon $\mathbb{H}$. Aloitamme määrittelemällä paloittain differentioituvan polun pituuden:

Määritelmä 3.7. Olkoon $\delta \colon [a,b] \to \mathbb{H}$ ylemmän puolitason $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) > 0\}$ polku. Polun δ *hyperbolinen pituus* on

$$L_{\mathbb{H}}(\delta) = \int_\delta \frac{1}{\mathrm{Im}(z)} = \int_a^b \frac{|\delta'(t)|}{\mathrm{Im}(\delta(t))} dt.$$

Esimerkki 3.8.

(1) Olkoon

$$\delta \colon [0,1] \to \mathbb{H},\ \ t \mapsto a_1 + t(a_2 - a_1) + ib,$$

polku pisteestä $a_1 + ib$ pisteeseen $a_2 + ib$. Tällöin

$$\delta'(t) = a_2 - a_1 \ \text{ ja } \ \mathrm{Im}(\delta(t)) = b,$$

joten

$$L_{\mathbb{H}}(\delta) = \int_0^1 \frac{|a_2 - a_1|}{b} dt = \frac{|a_2 - a_1|}{b}.$$

(2) Edellisen kohdan perusteella vaakasuoran polun pisteestä $-2+i$ pisteeseen $2+i$ pituus on 4.

(3) Olkoon sitten δ polku pisteestä $-2+i$ pisteeseen $2+i$,

$$\delta(t) = \begin{cases} (2t-2) + i(1+t), & \text{jos } \ 0 \le t \le 1, \\ (2t-2) + i(3-t), & \text{jos } \ 1 \le t \le 2. \end{cases}$$

Tällöin

$$|\delta'(t)| = \begin{cases} |2+i| = \sqrt{5}, & \text{jos } \ 0 < t < 1, \\ |2-i| = \sqrt{5}, & \text{jos } \ 1 < t < 2, \end{cases}$$

ja

$$\operatorname{Im}(\delta(t)) = \begin{cases} 1+t, & \text{jos} \quad 0 \le t \le 1, \\ 3-t, & \text{jos} \quad 1 \le t \le 2. \end{cases}$$

Niinpä

$$\begin{aligned} L_{\mathbb{H}}(\delta) = & \int_0^1 \tfrac{\sqrt{5}}{1+t} dt + \int_1^2 \tfrac{\sqrt{5}}{3-t} dt \\ = & \sqrt{5} \Big|_0^1 \ln(1+t) - \sqrt{5} \Big|_1^2 \ln(3-t) \\ = & 2\sqrt{5}\,\ln 2. \end{aligned}$$

Huomaa, että kolmannen kohdan polulla on lyhyempi hyperbolinen pituus kuin toisen kohdan polulla.

Harjoitustehtävä 3.9. *Olkoon* $0 < a < 1$ *ja olkoon* δ *jana pisteestä* ai *pisteeseen* i.

(1) *Parametrisoi* δ.
(2) *Osoita, että* $L_{\mathbb{H}}(\delta) = \ln(1/a)$.

Määritelmä 3.10. Olkoot $z, z' \in \mathbb{H}$. Pisteitten z ja z' välinen hyperbolinen etäisyys on

$$d_{\mathbb{H}}(z, z') = \inf\{L_{\mathbb{H}}(\delta)\},$$

missä infimum otetaan kaikkien niiden paloittain differentioituvien polkujen δ joukosta, joiden päätepisteet ovat z ja z'.

Harjoitustehtävä 3.11. *Osoita, että* $d_{\mathbb{H}}$ *toteuttaa kolmioepäyhtälön:*

$$d_{\mathbb{H}}(x, z) \le d_{\mathbb{H}}(x, y) + d_{\mathbb{H}}(y, z), \quad \text{kaikilla} \quad x, y, z \in \mathbb{H}.$$

4. Ympyrät, suorat ja Möbius-kuvaukset

Ympyrät ja suorat

Olemme kiinnostuneita seuraavasta ongelmasta: Olkoot z ja w ylemmän puolitason $\mathbb{H}$ pisteitä. Mikä on pisteitten z ja w välinen lyhin polku? (Lyhintä polkua sanotaan *geodeesiksi.*) Lyhimpien polkujen löytämiseksi pohdimme ensin kompleksitason suoria ja ympyröitä.

Samastetaan euklidinen avaruus $\mathbb{R}^2$ kompleksitason $\mathbb{C}$ kanssa samastamalla pisteet $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ja $x + iy \in \mathbb{C}$.

Suorat

Olkoon L ensin tason $\mathbb{R}^2$ suora. Tällöin suoran L pisteet (x, y) toteuttavat yhtälön

$$ax + by + c = 0, \tag{1}$$

joillakin reaaliluvuilla a, b ja c. Kirjoitetaan $z = x+iy$. Kompleksiluvun z kompleksikonjugaatti on $\overline{z} = x - iy$. Niinpä

$$x = \frac{1}{2}(z + \overline{z}) \;\; \text{ja} \;\; y = \frac{1}{2i}(z - \overline{z}).$$

Sijoittamalla nämä lausekeet yhtälöön 1, saadaan

$$a(\frac{1}{2}(z+\overline{z}))+b(\frac{1}{2i}(z-\overline{z}))+c=0.$$

Yksinkertaistamalla saadaan

$$\frac{1}{2}(a-ib)z+\frac{1}{2}(a+ib)\overline{z}+c=0.$$

Olkoon $\beta=(a-ib)/2$. Tällöin suoran L yhtälöksi saadaan

$$\beta z+\overline{\beta}\overline{z}+c=0. \tag{2}$$

Ympyrät

Olkoon C tason $\mathbb{R}^2$ ympyrä, jonka säde on r ja keskipiste (x_0,y_0). Tällöin ympyrän C yhtälö on

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2.$$

Olkoot $z=x+iy$ ja $z_0=x_0+iy_0$. Tällöin ympyrän C yhtälö voidaan kirjoittaa

$$|z-z_0|^2=r^2.$$

Jokaiselle kompleksiluvulle w pätee $w\overline{w}=|w|^2$. Niinpä ympyrän C yhtälö voidaan kirjoittaa muotoon

$$(z-z_0)\overline{(z-z_0)}=r^2,$$

eli

$$z\overline{z}-\overline{z}_0z-z_0\overline{z}+z_0\overline{z}_0-r^2=0.$$

Olkoot $\beta=-\overline{z}_0$ ja $\gamma=z_0\overline{z}_0-r^2=|z_0|^2-r^2$. Tällöin ympyrän C yhtälöksi saadaan

$$z\overline{z}+\beta z+\overline{\beta}\overline{z}+\gamma=0. \tag{3}$$

Huomautus 4.1. Huomaa, että jos yhtälö 2 tai yhtälö 3 kerrotaan nollasta poikkeavalla kompleksiluvulla, saadaan yhtälö, joka määrittelee saman suoran tai ympyrän kuin alkuperäinen yhtälö.

Yhtälöt 2 ja 3 voidaan yhdistää seuraavasti:

Lause 4.2. *Olkoon A kompleksitason $\mathbb{C}$ suora tai ympyrä. Tällöin A voidaan esittää yhtälöllä*

$$\alpha z\overline{z}+\beta z+\overline{\beta}\overline{z}+\gamma=0, \tag{4}$$

missä $\alpha,\gamma\in\mathbb{R}$ ja $\beta\in\mathbb{C}$.

Huomautus 4.3. Yhtälö 4 kuvaa suoraa, jos $\alpha=0$, ja ympyrää, jos $\alpha\neq 0$. Jälkimmäisessä tapauksessa yhtälö 4 voidaan jakaa luvulla α, jolloin saadaan muotoa 3 oleva yhtälö. (Triviaalit tilanteet, joissa esim. $\alpha=\beta=0$ jätetään lukijan selvitettäväksi.)

Harjoitustehtävä 4.4. *Olkoon C yhtälön 4 toteuttava ympyrä. Esitä ympyrän C keskipiste ja säde vakioitten α, β ja γ avulla.*

Ylemmän puolitason $\mathbb{H}$ geodeesit

Kompleksitason $\mathbb{C}$ suorista ja ympyröistä ne, joille kaikki vakiot α, β ja γ yhtälössä 4 ovat reaalilukuja, muodostavat tärkeän luokan.

Lause 4.5. *Olkoon A kompleksitason $\mathbb{C}$ suora tai ympyrä, joka toteuttaa yhtälön $\alpha z\overline{z} + \beta z + \overline{\beta}\overline{z} + \gamma = 0$, missä $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$. Tällöin A on joko (i) ympyrä, jonka keskipiste on reaaliakselilla tai (ii) reaaliakselia vastaan kohtisuorassa oleva suora.*

Todistus. Todistuksen idea on seuraava: Kirjoita $z = x + iy$ ja sijoita yhtälöön $\alpha z\overline{z} + \beta z + \overline{\beta}\overline{z} + \gamma = 0$. Tällöin y:n ensimmäiset potenssit katoavat yhtälöstä, mistä seuraa lauseen väite. □

Myöhemmin näemme, että ylemmän puolitason geodeesit (eli polut, joilla on lyhin hyperbolinen pituus) ovat täsmälleen Lauseen 4.5 kuvaamien suorien ja ympyröitten leikkaukset ylemmän puolitason kanssa. Huomaa, että kompleksitason ympyrä, jonka keskipiste on reaaliakselilla, leikkaa reaaliakselin ortogonaalisesti (eli kohtisuorassa).

Määritelmä 4.6. Reaaliakselia vastaan kohtisuorassa olevia ylemmän puolitason puoliympyröitä ja puolisuoria sanotaan *hyperbolisiksi suoriksi*. Hyperbolisten suorien muodostamalle jokolle käytetään merkintää $\mathcal{H}$.

Määritelmä 4.7. Hyperbolisia suoria l_1 ja l_2 sanotaan *yhdensuuntaisiksi*, jos $l_1 \cap l_2 = \emptyset$.

Lemma 4.8. *Olkoot $p, q \in \mathbb{H}$. Tällöin on olemassa yksikäsitteinen pisteitten p ja q kautta kulkeva hyperbolinen suora l.*

Todistus. Osoitetaan olemassaolo: Oletetaan ensin, että $\mathrm{Re}(p) = \mathrm{Re}(q)$, missä Re tarkoittaa luvun reaaliosaa. Tällöin

$$l = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) = \mathrm{Re}(p)\} \cap \mathbb{H}$$

on pisteitten p ja q kautta kulkeva hyperbolinen suora. Selvästi l on kohtisuorassa reaaliakselia vastaan.

Oletetaan sitten, että $\mathrm{Re}(p) \neq \mathrm{Re}(q)$. Etsitään euklidinen ympyrä, jonka keskipiste on reaaliakselilla ja joka kulkee pisteitten p ja q kautta. Olkoon $L_{p,q}$ pisteitä p ja q yhdistävä jana ja olkoon L janan $L_{p,q}$ keskinormaali. Jokaisen pisteitten p ja q kautta kulkevan ympyrän keskipiste on suoralla L. Olkoon c piste, missä L leikkaa reaaliakselin. Tällöin $|c - p| = |c = q|$. Ympyrä

$$A = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - c| = |c - p|\}$$

kulkee pisteitten p ja q kautta ja sen keskipiste $c \in \mathbb{R}$. Niinpä $l = A \cap \mathbb{H}$ on haluttu hyperbolinen suora.

Yksikäsitteidyyden todistaminen jääköön harjoitustehtäväksi. □

Eukleideen yhdensuuntaisaksiooma ei päde

Eukleideen yhdensuuntaisaksiooma ei päde ylemmässä puolitasossa:

Teoreema 4.9. *Olkoon l hyperbolinen suora ja olkoon $p \in \mathbb{H}$, $p \notin l$. Tällöin on olemassa äärettömän monta pisteen p kautta kulkevaa suoran l kanssa yhdensuuntaista hyperbolista suoraa.*

Todistus. Lisätään myöhemmin. $\square$

Möbius-kuvaukset

Määritelmä 4.10. Olkoot $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ sellaisia, että $ad - bc > 0$. Olkoon

$$\gamma \colon \mathbb{H} \to \mathbb{H}, \quad z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}.$$

Kutsumme kuvausta γ *ylemmän puolitason* $\mathbb{H}$ *Möbius-kuvaukseksi.*

Harjoitustehtävä 4.11. *Olkoon γ ylemmän puolitason $\mathbb{H}$ Möbius-kuvaus. Näytä, että γ on hyvin määritelty, eli että $\gamma(z) \in \mathbb{H}$ kaikilla $z \in \mathbb{H}$. Näytä myös, että γ on bijektio. Mikä on kuvauksen γ käänteiskuvaus γ^{-1}?*

Lause 4.12. *Olkoon* $\text{Möb}(\mathbb{H})$ *ylemmän puolitason $\mathbb{H}$ kaikkien Möbius-kuvausten muodostama joukko. Tällöin* $\text{Möb}(\mathbb{H})$ *on ryhmä, jonka laskutoimitus on kuvausten yhdistäminen.*

Huomautus 4.13. Ryhmän $\text{Möb}(\mathbb{H})$ laskutoimitus on kuvausten yhdistäminen. Olkoot γ_1 ja γ_2 Möbius-kuvauksia. Käytämme kuvausten γ_1 ja γ_2 yhdisteelle $\gamma_1 \circ \gamma_2$ merkintää $\gamma_1\gamma_2$. Niinpä

$$(\gamma_1\gamma_2)(z) = (\gamma_1 \circ \gamma_2)(z) = \gamma_1(\gamma_2(z))$$

kaikilla $z \in \mathbb{H}$.

Harjoitustehtävä 4.14. *Todista Lause 4.12, eli tee seuraavat asiat:*

(1) *Osoita, että Möbius-kuvausten yhdiste on Möbius-kuvaus.*
(2) *Tarkista liitännäisyys (voit käyttää tietoa, että kuvausten yhdistäminen on liitännäinen operaatio).*
(3) *Osoita, että identtinen kuvaus $\mathbb{H} \to \mathbb{H}$, $z \mapsto z$, on Möbius-kuvaus.*
(4) *Osoita, että jokaisen Möbius-kuvauksen γ käänteiskuvaus γ^{-1} on Möbius-kuvaus.*

Esimerkkejä Möbius-kuvauksista: Siirrot $z \mapsto z+b$, venytykset $z \mapsto kz$ $(k > 0)$, inversio $z \mapsto -\frac{1}{z}$.

Harjoitustehtävä 4.15. *Osoita, että siirrot, venytykset ja inversio $z \mapsto -\frac{1}{z}$ ovat Möbius-kuvauksia kirjoittamalla ne muodossa $z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$, missä $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $ad - bc > 0$.*

Olkoon $H \in \mathcal{H}$, eli H on hyperbolinen suora (eli H on joko puoliympyrä, jonka keskipiste on reaaliakselilla tai reaaliakselia vastaan kohtisuorassa oleva suora). Seuraavaksi osoitamme, että $\gamma(H) \in \mathcal{H}$ kun γ on Möbius-kuvaus.

Lause 4.16. *Olkoon H joko puoliympyrä, jonka keskipiste on reaaliakselilla, tai reaaliakselia vastaan kohtisuorassa oleva suora, ja olkoon γ ylemmän puolitason $\mathbb{H}$ Möbius-kuvaus. Tällöin $\gamma(H)$ on joko puoliympyrä, jonka keskipiste on reaaliakselilla, tai reaaliakselia vastaan kohtisuorassa oleva suora.*

Todistus. Esimerkin 4.14 perusteella tiedämme, että ylemmän puolitason Möbius-kuvaukset ovat ylemmän puolitason bijektioita itselleen. Niinpä riittää osoittaa, että γ kuvaa kompleksitason $\mathbb{C}$ reaaliakselia vastaan kohtisuorassa olevat suorat ja ympyrät, joiden keskipiste on reaaliakselilla, reaaliakselia vastaan kohtisuorassa oleville suorille ja ympyröille, joiden keskipiste on reaaliakselilla. Tällaisen suoran tai ympyrän yhtälö voidaan kirjoittaa muodossa

$$\alpha z\overline{z} + \beta z + \beta\overline{z} + \delta = 0, \tag{5}$$

joillakin $\alpha, \beta, \delta \in \mathbb{R}$. Olkoon

$$w = \gamma(z) = \frac{az+b}{cz+d},$$

missä $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ ja $ad - bc > 0$. Tällöin

$$z = \frac{dw-b}{-cw+a}.$$

Sijoittamalla yhtälöön 5 saadaan:

$$\alpha(\frac{dw-b}{-cw+a})(\frac{d\overline{w}-b}{-c\overline{w}+a}) + \beta(\frac{dw-b}{-cw+a}) + \beta(\frac{d\overline{w}-b}{-c\overline{w}+a}) + \delta = 0.$$

Niinpä

$$\begin{aligned}\alpha(dw-b)(d\overline{w}-b) &+ \beta(dw-b)(-c\overline{w}+a)\\ &+ \beta(d\overline{w}-b)(-cw+a) + \delta(-cw+a)(-c\overline{w}+a) = 0.\end{aligned}$$

Yksinkertaistamalla saadaan

$$\begin{aligned}(\alpha d^2 - 2\beta cd + \delta c^2)w\overline{w} &+ (-\alpha bd + \beta ad + \beta bc - \delta ac)w\\ &+ (-\alpha bd + \beta ad + \beta bc - \delta ac)\overline{w} + (\alpha b^2 - 2\beta ab + \delta a^2) = 0,\end{aligned}$$

mikä on juuri sellaisen suoran tai ympyrän yhtälö, joka haluttiin saada. □

Lause 4.16 voidaan esittää myös seuraavasti:

Lause 4.17. *Olkoon γ ylemmän puolitason Möbius-kuvaus. Tällöin γ kuvaa hyperboliset suorat hyperbolisille suorille.*

5. Möbius-kuvaukset ja ylemmän puolitason geodeesit

Enemmän Möbius-kuvauksista

Ylemmän puolitason $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}(z) > 0\}$ *reuna* on joukko

$$\partial\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}(z) = 0\} \cup \{\infty\}.$$

Olkoot $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $ad - bc > 0$. Olkoon

$$\gamma(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \tag{6}$$

jolloin γ on Möbius-kuvaus.

Määritellään γ myös reunalla $\partial\mathbb{H}$. Reaaliakselilla, lukuunottamatta pistettä $z = -d/c$, määrittelemme arvon $\gamma(z)$ yhtälön 6 avulla. Pisteessä $z = -d/c$ määrittelemme $\gamma(-d/c) = \infty$. Määritelläksemme arvon $\gamma(\infty)$ kirjoitetaan

$$\gamma(z) = \frac{a + b/z}{c + d/z}.$$

Huomaa, että $1/z \mapsto 0$, kun $z \mapsto \infty$. Niinpä määrittelemme $\gamma(\infty) = a/c$. Huomaa, että jos $c = 0$, niin $a \neq 0$ ja $d \neq 0$. Tällöin määrittelemme $a/0 = \infty$ ja $-d/0 = \infty$.

Harjoitustehtävä 5.1. *Osoita, että* $\gamma| : \partial\mathbb{H} \to \partial\mathbb{H}$ *on bijektio.*

Seuraava lause kertoo, että ylemmän puolitason Möbius-kuvaukset säilyttävät etäisyyden. Etäisyyden säilyttävää bijektiota kutsutaan *isometriaksi*. Niinpä Möbius-kuvaukset ovat ylemmän puolitason isometrioita.

Lause 5.2. *Olkoon* γ *ylemmän puolitason Möbius-kuvaus ja olkoot* $z, z' \in \mathbb{H}$. *Tällöin*

$$d_{\mathbb{H}}(\gamma(z), \gamma(z')) = d_{\mathbb{H}}(z, z').$$

Todistus. Olkoon σ polku pisteestä z pisteeseen z'. Tällöin $\gamma \circ \sigma$ on polku pisteestä $\gamma(z)$ pisteeseen $\gamma(z')$. Edelleen, koska γ on homeomorfismi (itse asiassa kompleksidiffeomorfismi), kaikki polut pisteestä $\gamma(z)$ pisteeseen $\gamma(z')$ saadaan tällä tavoin. Niinpä riittää osoittaa, että $L_{\mathbb{H}}(\gamma \circ \sigma) = L_{\mathbb{H}}(\sigma)$.

Laskemalla nähdään, että

$$|\gamma'(z)| = \frac{ad - bc}{|cz + d|^2}$$

ja

$$\mathrm{Im}(\gamma(z)) = \frac{(ad - bc)}{|cz + d|^2}\mathrm{Im}(z).$$

Ketjusääntöä soveltamalla saadaan

$$\begin{aligned}
L_{\mathbb{H}}(\gamma \circ \sigma) &= \int \tfrac{|(\gamma\circ\sigma)'(t)|}{\mathrm{Im}(\gamma\circ\sigma)(t)} dt \\
&= \int \tfrac{|\gamma'(\sigma(t))||\sigma'(t)|}{\mathrm{Im}(\gamma\circ\sigma)(t)} dt \\
&= \int \tfrac{ad-bc}{|c\sigma(t)+d|^2} |\sigma'(t)| \tfrac{|c\sigma(t)+d|^2}{ad-bc} \tfrac{1}{\mathrm{Im}(\sigma(t))} dt \\
&= \int \tfrac{|\sigma'(t)|}{\mathrm{Im}(\sigma(t))} dt \\
&= L_{\mathbb{H}}(\sigma).
\end{aligned}$$

□

Harjoitustehtävä 5.3. *Osoita, että*

$$|\gamma'(z)| = \frac{ad - bc}{|cz + d|^2}$$

ja

$$\operatorname{Im}(\gamma(z)) = \frac{(ad-bc)}{|cz+d|^2}\operatorname{Im}(z).$$

Harjoitustehtävä 5.4. *Olkoon $z = x + iy \in \mathbb{H}$. Määritellään kuvaus γ asettamalla $\gamma(z) = -x + iy$. (Huomaa, että γ ei ole Möbius-kuvaus.)*

(1) *Näytä, että $\gamma\colon \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ on bijektio.*
(2) *Olkoon $\sigma\colon [a, b] \to \mathbb{H}$ differentioituva polku. Näytä, että*

$$L_{\mathbb{H}}(\gamma \circ \sigma) = L_{\mathbb{H}}(\sigma).$$

Päättele, että γ on ylemmän puolitason isometria.

Imaginääriakseli on geodeesi

Seuraavaksi lähdemme etsimään ylemmän puolitason geodeeseja eli kahden pisteen välisiä lyhyimpiä polkuja. Ensimmäiseksi osoitamme, että imaginääriakseli on geodeesi.

Lause 5.5. *Olkoot $a, b \in \mathbb{R}$, $0 < a < b$. Tällöin pisteitten ia ja ib välinen hyperbolinen etäisyys on $\ln(b/a)$. Edelleen, pystysuora jana pisteestä ia pisteeseen ib on yksikäsitteinen pisteitten ia ja ib välinen polku, jonka pituus on $\ln(b/a)$, kaikkien muiden pisteitten ia ja ib välisten polkujen pituus on suurempi kuin $\ln(b/a)$.*

Todistus. Olkoon $\sigma(t) = it$, $a \leq t \leq b$. Tällöin σ on polku pisteestä ia pisteeseen ib. Selvästi $\|\sigma'(t)\| = 1$, joten

$$L_{\mathbb{H}}(\sigma) = \int_a^b \frac{1}{t}dt = \ln(b/a).$$

Olkoon sitten $\sigma\colon [0, 1] \to \mathbb{H}$, $t \mapsto x(t) + iy(t)$, mielivaltainen polku pisteestä ia pisteeseen ib. Tällöin

$$\begin{array}{rcl} L_{\mathbb{H}}(\sigma) & = & \int_0^1 \frac{\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}}{y(t)}dt \\ & \geq & \int_0^1 \frac{|y'(t)|}{y(t)}dt \\ & \geq & \int_0^1 \frac{y'(t)}{y(t)}dt \\ & = & \ln(y(1)) - \ln(y(0)) \\ & = & \ln(b/a). \end{array}$$

Niinpä minkä tahansa pisteet ia ja ib yhdistävän polun pituus on vähintään $\ln(b/a)$ ja pituus on täsmälleen $\ln(b/a)$, jos $x'(t) = 0$. Tämä on mahdollista ainoastaan kun $x(t)$ on vakio, eli σ on jana pisteestä ia pisteeseen ib. □

Kuvaukset imaginääriakselille

Toistaiseksi olemme osoittaneet, että imaginääriakseli on geodeesi. Väitämme, että myös mikä tahansa ylemmän puolitason reaaliakselia vastaan kohtisuorassa oleva suora tai ympyrä on geodeesi. Ensimmäiseksi näytämme, että mikä tahansa geodeesiehdokkaistamme voidaan kuvata imaginääriakselille Möbius-kuvauksella.

Huomautus 5.6. Huomaa, että päätepisteet reunalla $\partial\mathbb{H}$ määräävät geodeesiehdokkaamme yksikäsitteisesti. Ylemmän puolitason puoliympyröillä, jotka leikkaavat reaaliakselin kohtisuorassa, on kaksi päätepistettä reaaliakselilla. Ylemmän puolitason puolisuorilla, jotka ovat kohtisuorassa reaaliakselia vastaan, on yksi päätepiste reaaliakselilla toisen päätepisteen ollessa ∞.

Lemma 5.7. *Olkoon $H \in \mathcal{H}$. Tällöin on olemassa $\gamma \in$ Möb($\mathbb{H}$), joka kuvaa H:n bijektiivisesti imaginääriakselille.*

Todistus. Olkoon H ensin suora $\mathrm{Re}(z) = a$. Tällöin siirto $z \mapsto z - a$ on Möbius-kuvaus, joka kuvaa suoran H imaginääriakselille $\mathrm{Re}(z) = 0$.

Olkoon H seuraavaksi puoliympyrä, jonka päätepisteet ovat ξ_+ ja $\xi_- \in \mathbb{R}$, missä $\xi_- < \xi_+$. Olkoon γ kuvaus

$$\gamma(z) = \frac{z - \xi_+}{z - \xi_-}.$$

Koska $-\xi_- + \xi_+ > 0$, kuvaus γ on Möbius-kuvaus. Niinpä $\gamma(H) \in \mathcal{H}$. Selvästi $\gamma(\xi_+) = 0$ ja $\gamma(\xi_-) = \infty$, joten kuvan $\gamma(H)$ täytyy olla imaginääriakseli. □

Harjoitustehtävä 5.8. *Olkoot $H_1, H_2 \in \mathcal{H}$. Osoita, että on olemassa Möbius-kuvaus γ, jolle $\gamma(H_1) = H_2$.*

Lemma 5.9. *Olkoon $H \in \mathcal{H}$ ja olkoon $z_0 \in H$. Tällöin on olemassa ylemmän puolitason Möbius-kuvaus γ, joka kuvaa H:n imaginääriakselille ja jolle $\gamma(z_0) = i$.*

Todistus. Lemman 5.7 perusteella on olemassa ylemmän puolitason Möbius-kuvaus γ_1, joka kuvaa H:n imaginääriakselille. Niinpä $\gamma_1(z_0)$ on imaginääriakselilla. Kaikilla $k > 0$, Möbius-kuvaus $\gamma_2(z) = kz$ kuvaa imaginääriakselin itselleen. Kun $k > 0$ valitaan sopivasti, kuvaus γ_2 kuvaa pisteen $\gamma_1(z_0)$ pisteelle i. Yhdistetty kuvaus $\gamma = \gamma_2 \circ \gamma_1$ on haluttu Möbius-kuvaus. □

Harjoitustehtävä 5.10. *Olkoot $H_1, H_2 \in \mathbb{H}$ ja olkoot $z_1 \in H_1$, $z_2 \in H_2$. Näytä, että on olemassa sellainen Möbius-kuvaus γ, että $\gamma(H_1) = H_2$ ja $\gamma(z_1) = z_2$.*

Teoreema 5.11. *Ylemmän puolitason $\mathbb{H}$ geodeesit ovat ne puolisuorat ja puoliympyrät, jotka ovat kohtisuorassa reaaliakselia vastaan. Olkoot $z_1, z_2 \in \mathbb{H}$. Tällöin on olemassa täsmälleen yksi geodeesi, joka kulkee pisteitten z_1 ja z_2 kautta.*

Todistus. Olkoon $H \in \mathcal{H}$ sellainen, että $z_1, z_2 \in H$. Lemman 5.9 perusteella on olemassa sellainen Möbius-kuvaus γ, että $\gamma(z_1)$ ja $\gamma(z_2)$ ovat imaginääriakselilla. Lauseen 5.5 perusteella imaginääriakseli on ainoa geodeesi, joka kulkee pisteitten $\gamma(z_1)$ ja $\gamma(z_2)$ kautta. Soveltamalla kuvausta γ^{-1} huomataan, että H on yksikäsitteinen pisteitten z_1 ja z_2 kautta kulkeva geodeesi. □

Harjoitustehtävä 5.12. *Kuvaile (joko sanallisesti tai muotoa $\alpha z\overline{z} + \beta z + \beta\overline{z} + \delta = 0$ olevan yhtälön avulla) annettujen pisteitten kautta kulkevat geodeesit:*

(1) $-3 + 4i$, $-3 + 5i$,
(2) $-3 + 4i$, $3 + 4i$,
(3) $-3 + 4i$, $5 + 12i$.

Ylemmän puolitason isometriat

Lauseen 5.2 perusteella Möbius-kuvaukset ovat ylemmän puolitason isometrioita. Harjoitustehtävän 5.4 perusteella ylemmällä puolitasolla on myös muita isometrioita. Huomaa, että Möbius-kuvaukset ovat suunnistuksen säilyttäviä. (Tämä tarkoittaa karkeasti ottaen seuraavaa: Olkoon $\triangle$ ylemmän puolitason kolmio, jonka kärjet vastapäivään kuljettaessa ovat A, B ja C. Olkoon $\triangle'$ kolmio, jonka kärjet ovat $\gamma(A)$, $\gamma(B)$ ja $\gamma(C)$. Jos kolmion $\triangle'$ kärjet vastapäivään kuljettaessa ovat tässä järjestyksessä, sanotaan, että kuvaus γ on suunnistuksen säilyttävä.) Huomaa, että kuvaus $\gamma(z) = -x + iy$ peilaa pisteen z imaginääriakselin suhteen ja on suunnistuksen kääntävä. Voidaan osoittaa, että kaikki ylemmän puolitason suunnistuksen säilyttävät isometriat ovat Möbius-kuvauksia, ja että kaikki ylemmän puolitason suunnistuksen kääntävät isometriat ovat Möbius-kuvauksen ja imaginääriakselin suhteen suoritetun peilauksen yhdisteitä.

Mielivaltaisten pisteitten välinen etäisyys

Aiemmin löysimme kaavan pisteitten ia ja ib väliselle etäisyydelle. Seuraavaksi todistamme kaavan ylemmän puolitason mielivaltaisten pisteitten väliselle etäisyydelle. Tarvitsemme seuraavaa aputulosta:

Lemma 5.13. *Olkoon γ Möbius-kuvaus. Tällöin kaikille $z, w \in \mathbb{H}$ pätee*

$$|\gamma(z) - \gamma(w)| = |z - w||\gamma'(z)|^{1/2}|\gamma'(w)|^{1/2}.$$

Lause 5.14. *Olkoot $z, w \in \mathbb{H}$. Tällöin*

$$\cosh d_{\mathbb{H}}(z, w) = 1 + \frac{|z - w|^2}{2\mathrm{Im}(z)\mathrm{Im}(w)}. \tag{7}$$

Harjoitustehtävä 5.15. *Todista Lause 5.14 seuraavasti: Olkoot $z, w \in \mathbb{H}$. Olkoot*

$$\begin{aligned} \mathrm{VP}(z, w) &= \cosh d_{\mathbb{H}}(z, w) \\ \mathrm{OP}(z, w) &= 1 + \tfrac{|z-w|^2}{2\mathrm{Im}(z)\mathrm{Im}(w)} \end{aligned}$$

yhtälön 7 vasen ja oikea puoli. Haluamme näyttää, että $\mathrm{VP}(z, w) = \mathrm{OP}(z, w)$ kaikilla $(z, w) \in \mathbb{H} \times \mathbb{H}$.

(1) *Olkoon γ ylemmän puolitason Möbius-kuvaus. Osoita, että*

$$\mathrm{VP}(\gamma(z), \gamma(w)) = \mathrm{VP}(z, w)$$

käyttämällä tietoa, että γ on isometria. Käytä Harjoitustehtävää 5.3 ja Lemmaa 5.13 ja osoita, että

$$\mathrm{OP}(\gamma(z), \gamma(w)) = \mathrm{OP}(z, w).$$

(2) *Olkoon H pisteitten z ja w kautta kulkeva geodeesi. Lemman 5.9 perusteella on olemassa Möbius-kuvaus γ, joka kuvaa geodeesin H imaginääriakselille. Olkoot $\gamma(z) = ia$ ja $\gamma(w) = ib$. Käytä tietoa $d_{\mathbb{H}}(ia, ib) = \ln(b/a)$, jos $a < b$ todistaaksesi, että*

$$\mathrm{VP}(\gamma(z), \gamma(w)) = \mathrm{OP}(\gamma(z), \gamma(w)).$$

(3) *Päättele, että* $\mathrm{VP}(z,w) = \mathrm{OP}(z,w)$ *kaikilla* $(z,w) \in \mathbb{H} \times \mathbb{H}$.

On olemassa muitakin yhtälöitä, jotka kertovat miten kahden ylemmän puolitason pisteen välinen etäisyys voidaan ilmaista niiden euklidisen etäisyyden avulla:

Harjoitustehtävä 5.16. *Olkoot* $z, w \in \mathbb{H}$. *Todista seuraavat yhtälöt:*

(1) $d_{\mathbb{H}}(z,w) = \ln \frac{|z-\bar{w}|+|z-w|}{|z-\bar{w}|-|z-w|}$,
(2) $\sinh(\frac{1}{2}d_{\mathbb{H}}(z,w)) = \frac{|z-w|}{2(\mathrm{Im}(z)\mathrm{Im}(w))^{\frac{1}{2}}}$,
(3) $\cosh(\frac{1}{2}d_{\mathbb{H}}(z,w)) = \frac{|z-\bar{w}|}{2(\mathrm{Im}(z)\mathrm{Im}(w))^{\frac{1}{2}}}$.

Hyperbolisen etäisyyden määritelmästä

Harjoitustehtävä 5.17. *Palautetaan mieliin, että hyperbolisen etäisyyden määrittelemiseksi ensin määrittelimme paloittain differentioituvan polun* σ *hyperbolisen pituuden:*

$$L_{\mathbb{H}}(\sigma) = \int \frac{|\sigma'(t)|}{\mathrm{Im}(\sigma(t))} dt = \int_\sigma \frac{1}{\mathrm{Im}(z)}. \tag{8}$$

Osoitimme sitten, että Möbius-kuvaukset ovat ylemmän puolitason isometrioita.

Miksi valitsimme kuvauksen $1/\mathrm{Im}(z)$ *yhtälössä 8? Itse asiassa olisi mahdollista valita mikä tahansa ainoastaan positiivisia arvoja saava jatkuva kuvaus ja käyttää sitä polun pituuden määrittelemiseen. Eri kuvausten valinta johtaisi erilaisiin geometrioihin. Geometriasta voisi tulla hyvin monimutkainen. Olisi myös mahdollista, että geometriasta ei tulisi kovin mielenkiintoista, esimerkiksi isometrioitten muodostama ryhmä voisi olla hyvin pieni.*

Tulemme näkemään, että ylemmän puolitason Möbius-kuvausten muodostamalla ryhmällä on mielenkiintoisia ominaisuuksia ja mielenkiintoisia aliryhmiä. Tämän harjoituksen tarkoitus on osoittaa, että jos haluamme Möbius-kuvausten olevan ylemmän puolitason isometrioita, niin tällöin meidän tulee määritellä hyperbolinen pituus yhtälön 8 avulla.

Olkoon $\delta\colon \mathbb{H} \to \mathbb{R}$ *jatkuva kuvaus, joka saa ainoastaan positiivisia arvoja. Määritellään polun* $\sigma\colon [a,b] \to \mathbb{H}$ δ*-pituus* $L_\delta(\sigma)$ *asettamalla*

$$L_\delta(\sigma) = \int_\sigma \delta = \int_a^b \delta(\sigma(t))|\sigma'(t)|dt.$$

(1) *Oletetaan, että* L_δ *on invariantti Möbius-kuvausten suhteen, eli* $L_\delta(\sigma) = L_\delta(\gamma \circ \sigma)$ *kaikilla* $\gamma \in \mathrm{Möb}(\mathbb{H})$. *Osoita, että*

$$\delta(\gamma(z))|\gamma'(z)| = \delta(z). \tag{9}$$

(Vihje: Voit käyttää seuraavaa tietoa: Olkoon f *jatkuva kuvaus, jolle* $\int_\sigma f = 0$ *kaikilla poluilla* σ. *Tällöin* $f = 0$.*)*

(2) *Valitse* $\gamma(z) = z + b$, $b \in \mathbb{R}$, *yhtälössä 9. Päättele, että* $\delta(z)$ *riippuu ainoastaan luvun* z *imaginääriosasta. Niinpä* $\delta(z) = \delta(y)$, *missä* $z = x + iy$.

(3) *Valitse* $\gamma(z) = kz$, $k > 0$, *yhtälössä 9. Päättele, että* $\delta(y) = c/y$ *jollain* $c > 0$.

Ylläolevasta seuraa, että jos haluamme Möbius-kuvausten olevan ylemmän puolitason isometrioita, tulee polun pituus määritellä kuten yhtälössä 8. (Vakiolla $c > 0$ *kertominen antaisi poluille eri pituudet. Vakiolla kertomista vailla pituudelle saadaan yksikäsitteinen määritelmä.)*

Hyperboliset ympyrät

Lemma 5.18. *Ylemmän puolitason Möbius-kuvaus* $J \colon \mathbb{H} \to \mathbb{H}$, $z \mapsto -\frac{1}{z}$, *kuvaa ylemmän puolitason euklidiset ympyrät ylemmän puolitason euklidisille ympyröille.*

Todistus. Olkoon

$$\alpha z\bar{z} + \beta z + \bar{\beta}\bar{z} + \delta = 0$$

ylemmän puolitason ympyrän yhtälö. Koska ympyrä on ylemmässä puolitasossa, se ei voi kulkea origon kautta, joten $\delta \neq 0$. Olkoon $w = J(z) = -\frac{1}{z}$. Tällöin $z = -\frac{1}{w}$. Sijoitetaan tämä edelliseen yhtälöön, jolloin saadaan

$$\alpha \frac{1}{w}\frac{1}{\bar{w}} - \beta\frac{1}{w} - \bar{\beta}\frac{1}{\bar{w}} + \delta = 0.$$

Kertomalla yllä oleva yhtälö luvulla $w\bar{w}$ saadaan

$$\alpha - \beta\bar{w} - \bar{\beta}w + \delta w\bar{w} = 0. \qquad (*)$$

Koska $\delta \neq 0$, on yhtälö $(*)$ ylemmän puolitason ympyrän yhtälö. □

Selvästi pätee:

Lemma 5.19. *Olkoon* $\gamma \colon \mathbb{H} \to \mathbb{H}$, $z \mapsto az + b$, *ylemmän puolitason Möbius-kuvaus. Tällöin* γ *kuvaa ylemmän puolitason euklidiset ympyrät ylemmän puolitason euklidisille ympyröille.*

Lause 5.20. *Jokainen ylemmän puolitason Möbius-kuvaus voidaan kirjoittaa kuvauksen* $J(z) = -\frac{1}{z}$ *ja muotoa* $z \mapsto az + b$, *missä* $a, b \in \mathbb{R}$ *ja* $a > 0$, *olevien kuvausten yhdisteenä.*

Todistus. Olkoon

$$\gamma(z) = \frac{az + b}{cz + d},$$

missä $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ ja $ad - bc > 0$, ylemmän puolitason Möbius-kuvaus. Oletetaan ensin, että $c \neq 0$. Tällöin myös kuvaukset

$$g(z) = c^2 z + cd, \text{ ja } f(z) = (ad - bc)z + \frac{a}{c},$$

ovat ylemmän puolitason Möbius-kuvauksia. Olkoon

$$J(z) = -\frac{1}{z},$$

kuten edellä. Kirjoitetaan

$$\begin{aligned}\gamma(z) &= \tfrac{az+b}{cz+d} = \tfrac{(az+b)c}{(cz+d)c} \\ &= \tfrac{acz+ad-(ad-bc)}{c^2z+cd} = \tfrac{a}{c} - \tfrac{ad-bc}{c^2z+cd}.\end{aligned}$$

Toisaalta

$$f(J(g(z))) = f(J(cz^2+cd)) = f(\frac{-1}{c^2z+cd}) = -\frac{ad-bc}{c^2z+cd} + \frac{a}{c}.$$

Niinpä $\gamma = f \circ J \circ g$.

Olkoon sitten $c = 0$. Tällöin $\gamma(z) = \frac{a}{d}z + b$, joten γ on haluttua muotoa oleva kuvaus, koska $\frac{a}{d} > 0$. □

Lause 5.21. *Olkoon γ ylemmän puolitason Möbius-kuvaus ja olkoon C euklidinen ympyrä ylemmässä puolitasossa. Tällöin myös $\gamma(C)$ on euklidinen ympyrä ylemmässä puolitasossa.*

Todistus. Lauseen väite seuraa suoraan Lemmoista 5.18 ja 5.19 sekä Lauseesta 5.20. □

Määritelmä 5.22. Ylemmän puolitason *hyperbolinen ympyrä* C, jonka keskipiste on z_0 ja säde on $r > 0$, on niiden pisteitten joukko, joiden hyperbolinen etäisyys pisteestä z_0 on r.

Lause 5.23. *Olkoon $C \subset \mathbb{H}$. Tällöin C on hyperbolinen ympyrä, jos ja vain jos se on euklidinen ympyrä.*

Todistus. Olkoon C hyperbolinen ympyrä, jonka keskipiste on w ja säde $r > 0$. Harjoitustehtävän 5.16 perusteella hyperbolisen ympyrän C pisteitä ovat täsmälleen ne ylemmän puolitason pisteet z, jotka toteuttavat yhtälön

$$d_{\mathbb{H}}(z,w) = \ln \frac{|z-\bar{w}| + |z-w|}{|z-\bar{w}| - |z-w|} = r.$$

Yhtäpitävästi

$$\frac{|z-\bar{w}| + |z-w|}{|z-\bar{w}| - |z-w|} = e^r = s > 1,$$

eli

$$(1-s)|z-\bar{w}| = (-1-s)|z-w|.$$

Laskemalla nähdään, että tämä on edelleen yhtäpitävää sen kanssa, että

$$(\frac{s-1}{s+1})^2(z\bar{z} - zw - \bar{z}\bar{w} + w\bar{w}) = z\bar{z} - z\bar{w} - \bar{z}w + w\bar{w}.$$

Kirjoittamalla $a = (\frac{s-1}{s+1})^2$ ja yhdistelemällä termejä voidaan yllä oleva yhtälö kirjoittaa muodossa

$$(a-1)z\bar{z} + (\bar{w} - aw)z + (w - a\bar{w})\bar{z} + (a-1)w\bar{w}. \qquad (*)$$

Lauseen 4.2 perusteella yhtälö $(*)$ esittää kompleksitason suoraa tai ympyrää.

Pitää vielä tarkistaa, että $(*)$ on euklidisen ympyrän eikä suoran yhtälö. Lisäksi pitää huomata, että koska $C \subset \mathbb{H}$, olisi periaatteessa mahdollista, että yhtälön $(*)$

toteuttavien ylemmän puolitason pisteitten joukko muodostaisi vain osan euklidista ympyrää, eli euklidinen ympyrä leikkaisi x-akselin. Kumpikaan tilanne ei voi toteutua: Yhtälö ei kuvaa euklidista suoraa, koska $a-1 \neq 0$. Geometrisesti ajateltuna yhtälö ei voi kuvata euklidista suoraa, koska suoralla olisi välttämättä pisteitä, joilla olisi mielivaltaisen suuri hyperbolinen etäisyys keskipisteestä w. Sama asia tapahtuisi, jos yhtälö $(*)$ kuvaisi euklidista ympyrää, joka leikkasi x-akselin. Niinpä ainoa mahdollisuus on, että C on kokonainen euklidinen ympyrä. $\square$

Yhdistämällä Lauseet 5.21 ja 5.23 saadaan:

Korollaari 5.24. *Ylemmän puolitason Möbius-kuvaukset kuvaavat hyperboliset ympyrät hyperbolisille ympyröille.*

Hyperboliset kulmat

Määrittelemme kulmat hyperbolisessa geometriassa samoiksi kuin euklidiset kulmat. Nähdäksemme, miksi niin tehdään, kertaamme seuraavaksi hitusen lineaarialgebraa.

Palautetaan ensin mieliin, miten kulmat määritellään euklidisessa tasossa $\mathbb{R}^2$. Olkoon $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ ja olkoot $v = (v_1, v_2)$ ja $w = (w_1, w_2)$ kaksi vektoria pisteessä (x,y). Vektoreitten v ja w *sisätulo* pisteessä (x,y) on

$$< v, w >_{(x,y)} = v_1 w_1 + v_2 w_2.$$

Vektorin v *normi* pisteessä (x,y) puolestaan on

$$\|v\|_{(x,y)} = \sqrt{< v, v >_{(x,y)}} = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}.$$

Cauchyn ja Schwartzin epäyhtälön mukaan

$$| < v, w >_{(x,y)} | \leq \|v\|_{(x,y)} \| \|w\|_{(x,y)}.$$

Määrittelemme vektoreitten v ja w välisen (euklidisen) kulman $\theta = \angle(v,w)$ pisteessä (x,y) yhtälön

$$\cos\theta = \frac{< v, w >_{(x,y)}}{\|v\|_{(x,y)} \|w\|_{(x,y)}}.$$

avulla. (Huomaa, että me emme ole kiinnostuneita kulman merkistä: $\angle(v,w) = \angle(w,v)$.)

Ylemmässä puolitasossa kulmat määritellään kuten edellä, mutta käytämme eri sisätuloa. Olkoon $z \in \mathbb{H}$. Olkoot v ja w kaksi vektoria pisteessä z. Vektoreitten v ja w *sisätulo* pisteessä z on

$$< v, w >_z = \frac{1}{\mathrm{Im}(z)^2}(v_1 w_1 + v_2 w_2).$$

Vektorin v *normi* pisteessä z on

$$\|v\|_z = \sqrt{< v, v >_z} = \frac{1}{\mathrm{Im}(z)}\sqrt{v_1^2 + v_2^2}.$$

Cauchyn ja Schwartzin epäyhtälö pätee tässäkin tapauksessa ja voimme määritellä vektoreitten v ja w välisen kulman θ yhtälön

$$\cos\theta = \frac{< v, w >_z}{\|v\|_z \|w\|_z}$$

avulla. Huomaa, että yllä olevassa yhtälössä termit $\mathrm{Im}(z)$ kumoavat toisensa, joten kosini on sama kuin euklidisessa geometriassa.

Olkoot σ_1 ja σ_2 kaksi polkua, jotka leikkavat pisteessä z. Parametrisoimalla polut sopivasti voimme olettaa, että $z = \sigma_1(0) = \sigma_2(0)$. Määrittelemme polkujen σ_1 ja σ_2 väliseksi kulmaksi kulman

$$\angle(\sigma_1'(0), \sigma_2'(0)),$$

toisin sanoen kahden polun välinen kulma on niiden tangenttivektorien välinen kulma leikkauspisteessä.

Konformikuvaukset

Määritelmä 5.25. Kuvausta $\gamma\colon \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ sanotaan *konformikuvaukseksi*, jos se säilyttää polkujen väliset kulmat: Jos polkujen σ_1 ja σ_2 välinen kulma leikkauspisteessä z on θ, niin tällöin myös polkujen $\gamma\sigma_1$ ja $\gamma\sigma_2$ välinen kulma leikkauspisteessä $\gamma(z)$ on θ.

Tulemme huomaamaan, että Möbius-kuvaukset ovat konformikuvauksia. Todistusta varten tarvitsemme seuraavan perustuloksen kompleksianalyysistä:

Lause 5.26. *Olkoon $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ kompleksidifferentioituva kuvaus. Kirjoitetaan*

$$f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y).$$

Tällöin

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Lauseen 5.26 yhtälöitä sanotaan *Cauchy-Riemannin yhtälöiksi.*

Lause 5.27. *Olkoon γ ylemmän puolitason $\mathbb{H}$ Möbius-kuvaus. Tällöin γ on konformikuvaus.*

Todistus. Olkoon γ ylemmän puolitason $\mathbb{H}$ Möbius-kuvaus. Kirjoitetaan γ sen reaali- ja imaginääriosien avulla, eli $\gamma(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$. Kuvauksen γ osittaisderivaattojen muodostama matriisi on

$$D\gamma(z) = \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix},$$

missä $u_x = \partial u/\partial x$.

Olkoot σ_1 ja σ_2 kaksi polkua, jotka leikkaavat pisteessä $z = \sigma_1(0) = \sigma_2(0)$. Olkoot polkujen σ_1 ja σ_2 tangenttivektorit pisteessä z $\sigma_1'(0)$ ja $\sigma_2'(0)$. Tällöin $\gamma\sigma_1$ ja $\gamma\sigma_2$ ovat polkuja, joiden leikkauspiste on $\gamma(z)$, ja joiden tangenttivektorit tässä leikkauspisteessä ovat $D\gamma(z)\sigma_1'(0)$ ja $D\gamma(z)\sigma_2'(0)$.

Olkoot $v = (v_1, v_2)$ ja $w = (w_1, w_2)$ kaksi vektoria pisteessä z. Riittää osoittaa, että

$$\frac{< D\gamma(v), D\gamma(w) >_{\gamma(z)}}{\|D\gamma(v)\|_{\gamma(z)}\|D\gamma(w)\|_{\gamma(z)}} = \frac{< v, w >_z}{\|v\|_z\|w\|_z}.$$

Huomaa, että

$$< D\gamma(v), D\gamma(w) >_{\gamma(z)} = \frac{1}{\mathrm{Im}(\gamma(z))} < v, (D\gamma)^T D\gamma(w) >,$$

missä $(D\gamma)^T$ on matriisin $D\gamma$ transpoosi ja $<,>$ tarkoittaa euklidista sisätuloa. Cauchy-Riemannin yhtälöistä seuraa, että

$$(D\gamma)^T D\gamma = \begin{pmatrix} u_x & v_x \\ u_y & v_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_x^2 + u_y^2 & 0 \\ 0 & u_x^2 + u_y^2 \end{pmatrix},$$

on 2×2-identiteettimatriisi kerrottuna termillä $u_x^2 + u_y^2 \neq 0$. □

Huomautus 5.28. Itse asiassa osoitimme, että mikä tahansa kompleksidifferentitoituva kuvaus, jolle $u_x^2 + u_y^2$ ei koskaan ole nolla, on konformikuvaus.

Hyperbolinen pinta-ala

Olkoon $\sigma\colon [a, b] \to \mathbb{H}$ polku. Polun σ pituus on

$$L_{\mathbb{H}}(\sigma) = \int_\sigma \frac{1}{\mathrm{Im}(z)} = \int_a^b \frac{|\sigma'(t)|}{\mathrm{Im}(\sigma(t))} dt = \int_a^b \|\sigma'(t)\|_{\sigma(t)} dt.$$

Olkoon sitten $U \subset \mathbb{H}$ ja $z \in A$. Olkoon R pisteen z sisältävä pieni suorakulmio, jonka sivut ovat dx ja dy. Suorakulmion hyperbolinen pinta-ala on tällöin

$$\frac{1}{\mathrm{Im}(z)^2} dxdy.$$

Niinpä määrittelemme joukon U hyperbolisen pinta-alan $A_{\mathbb{H}}(U)$ seuraavasti:

$$A_{\mathbb{H}}(U) = \int\int_U \frac{1}{\mathrm{Im}(z)^2} dz = \int\int_U \frac{1}{y^2} dxdy,$$

jos yllä oleva integraali on olemassa. On selvää, että kaikille joukoille pinta-alaa ei tällä tavoin voida määritellä.

Möbius-kuvaukset ovat isometrioita, eli ne säilyttävät etäisyyden. Seuraavaksi osoitamme, että ne säilyttävät myös pinta-alan:

Lause 5.29. *Olkoon $U \subset \mathbb{H}$ ja olkoon $\gamma \in \mathrm{M\ddot{o}b}(\mathbb{H})$. Tällöin*

$$A_{\mathbb{H}}(\gamma(U)) = A_{\mathbb{H}}(U).$$

Todistus. Olkoon $\gamma(z) = (az + b)/(cz + d)$, $ad - bc > 0$, Möbius-kuvaus. Olkoon $h\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Tällöin

$$\int\int_{\gamma(U)} h(x, y) dxdy = \int\int_U h \circ \gamma(x, y) |\det(D\gamma)| dxdy. \tag{10}$$

Laskemalla ja Cauchy-Riemannin yhtälöitä käyttämällä saadaan

$$\det(D\gamma) = \frac{(ad-bc)^2}{((cx+d)^2+c^2y^2)^2}.$$

Valitaan sitten $h(x,y) = 1/y^2$. Tällöin

$$h \circ \gamma(x,y) = \left(\frac{(cx+d)^2+c^2y^2}{(ad-bc)y}\right)^2,$$

joten yhtälön 10 perusteella

$$\begin{aligned}
A_{\mathbb{H}}(\gamma(U)) &= \int\int_{\gamma(U)} h(x,y)dxdy \\
&= \int\int_U h\circ\gamma(x,y)|\det(D\gamma)|dxdy \\
&= \int\int_U \left(\tfrac{(cx+d)^2+c^2y^2}{(ad-bc)y}\right)^2 \left(\tfrac{ad-bc}{(cx+d)^2+c^2y^2}\right)^2 dxdy \\
&= \int\int_U \tfrac{1}{y^2}dxdy \\
&= A_{\mathbb{H}}(U).
\end{aligned}$$

□

6. Poincarén kiekko

Johdanto

Olemme toistaiseksi tutustuneet ylemmän puolitason malliin. On olemassa muitakin tapoja konstruoida hyperbolinen geometria. Seuraavaksi tutustumme *Poincarén kiekkoon.*

Määritelmä 6.1. Kiekkoa $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ kutsutaan Poincarén kiekoksi. Ympyrästä $\partial\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ käytetään nimityksiä *ympyrä äärettömyydessä* ja *kiekon* $\mathbb{D}$ *reuna.*

Ylempään puolitasoon verrattuna Poincarén kiekolla on se etu, että se on tason rajoitettu osajoukko. Tämän vuoksi kuvien piirtämiseen liittyvät tehtävät ovat yleensä miellyttäviä, kun käytetään Poincarén mallia. Ylemmän puolitason etu Poincarén kiekkoon verrattuna on se, että laskuissa on helppo käyttää suorakulmaisia koordinaatteja.

Tulemme näkemään, että Poincarén kiekon geodeeseja ovat kiekon $\mathbb{D}$ lävistäjät ja ne ympyrän kaaret, jotka leikkaavat reunan $\partial\mathbb{D}$ ortogonaalisesti. Etäisyyden ja pinta-alan määrittely Poincarén kiekolla on kätevintä tehdä käyttämällä apuna etäisyyttä ja pinta-alaa ylemmässä puolitasossa. Tämän vuoksi määrittelemme seuraavaksi kuvauksen

$$h\colon \mathbb{H} \to \mathbb{D}, \quad z \mapsto \frac{z-i}{iz-1}. \tag{11}$$

On helppo tarkistaa, että h on bijektio ylemmältä puolitasolta Poincarén kiekolle. Edelleen, h kuvaa reunan $\partial\mathbb{H}$ bijektiivisesti reunalle $\partial\mathbb{D}$.

Etäisyys Poincarén kiekolla

Seuraavaksi johdamme kaavan, jonka avulla voidaan laskea kahden Poincarén kiekolla olevan pisteen välinen etäisyys. Aivan kuten ylemmän puolitason tapauksessa määrittelemme ensin paloittain differentioituvan polun pituuden. Kahden pisteen välinen etäisyys on sitten infimum kaikkien näitä pisteitä yhdistävien paloittain differentioituvien polkujen pituuksista.

Olkoon g kuvauksen h käänteiskuvaus h^{-1}. Tällöin $g(\mathbb{D}) = \mathbb{H}$ ja

$$g(z) = \frac{z - i}{iz - 1}.$$

Olkoon $\sigma\colon [a, b] \to \mathbb{D}$ polku Poincarén kiekolla. Tällöin $g \circ \sigma\colon [a, b] \to \mathbb{H}$ on polku ylemmässä puolitasossa. Polun $g \circ \sigma$ pituus on

$$L_{\mathbb{H}}(g \circ \sigma) = \int_a^b \frac{|(g \circ \sigma)'(t)|}{\operatorname{Im}(g \circ \sigma(t))} dt = \int_a^b \frac{|g'(\sigma(t))||\sigma'(t)|}{\operatorname{Im}(g \circ \sigma(t))} dt.$$

Laskemalla nähdään, että

$$g'(z) = \frac{-2}{(-iz + 1)^2}$$

ja

$$\operatorname{Im}(g(z)) = \frac{1 - |z|^2}{|-iz + 1|^2},$$

joten

$$L_{\mathbb{H}}(g \circ \sigma) = \int_a^b \frac{2}{1 - |\sigma(t)|^2} |\sigma'(t)| dt. \tag{12}$$

Määrittelemme polun σ pituuden yhtälön 12 avulla:

$$L_{\mathbb{D}}(\sigma) = L_{\mathbb{H}}(g \circ \sigma) = \int_a^b \frac{2}{1 - |\sigma(t)|^2} |\sigma'(t)| dt.$$

Pisteitten $z, z' \in \mathbb{D}$ välinen etäisyys on

$$d_{\mathbb{D}}(z, z') = \inf\{L_{\mathbb{D}}(\sigma) \mid \sigma \text{ on paloittain diff. polku pist. } z \text{ pisteeseen } z'\}.$$

Huomaa, että

$$d_{\mathbb{D}}(h(z), h(w)) = d_{\mathbb{H}}(z, w), \tag{13}$$

missä $d_{\mathbb{H}}(z, w)$ on pisteitten z ja w välinen etäisyys ylemmässä puolitasossa.

Lause 6.2. *Olkoon $x \in [0, 1)$. Tällöin*

$$d_{\mathbb{D}}(0, x) = \ln\left(\frac{1 + x}{1 - x}\right).$$

Edelleen, reaaliakseli on yksikäsitteinen geodeesi, joka yhdistää pisteet 0 ja x.

Kahden Poincarén kiekolla olevan pisteen väliselle etäisyydelle voidaan johtaa samantapaiset kaavat kuin ylemmän puolitason tapauksessa (Harjoitustehtävä 5.16):

Harjoitustehtävä 6.3. *Olkoot $z, w \in \mathbb{D}$. Todista seuraavat yhtälöt:*

(1) $d_{\mathbb{D}}(z, w) = \ln \frac{|1 - z\bar{w}| + |z - w|}{|1 - z\bar{w}| - |z - w|}$,

(2) $\sinh^2(\frac{1}{2}d_{\mathbb{D}}(z,w)) = \frac{|z-w|^2}{(1-|z|^2)(1-|w|^2)}$,

(3) $\cosh^2(\frac{1}{2}d_{\mathbb{D}}(z,w)) = \frac{|1-z\bar{w}|^2}{(1-|z|^2)(1-|w|^2)}$,

(4) $\tanh(\frac{1}{2}d_{\mathbb{D}}(z,w)) = \frac{|z-w|}{|1-z\bar{w}|}$.

Todistus. Harjoitustehtävä. □

Poincarén kiekon Möbius-kuvaukset

Olkoon $\gamma \in$ Möb($\mathbb{H}$). Tällöin $h\gamma h^{-1} = h \circ \gamma \circ h^{-1}$ on kuvaus $\mathbb{D} \to \mathbb{D}$. Pisteille $u, v \in \mathbb{D}$ pätee

$$\begin{aligned} d_{\mathbb{D}}(h\gamma h^{-1}(u), h\gamma h^{-1}(v)) &= d_{\mathbb{H}}(\gamma h^{-1}(u), \gamma h^{-1}(v)) \\ &= d_{\mathbb{H}}(h^{-1}(u), h^{-1}(v)) \\ &= d_{\mathbb{D}}(u,v). \end{aligned}$$

Täten $h\gamma h^{-1}$ on Poincarén kiekon isometria.

Harjoitustehtävä 6.4. *Olkoon* $\gamma \in$Möb($\mathbb{H}$). *Osoita, että kuvaus* $z \mapsto h\gamma h^{-1}(z)$ *on muotoa*

$$z \mapsto \frac{\alpha z + \beta}{\overline{\beta} z + \overline{\alpha}},$$

missä $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ *ja* $|\alpha|^2 - |\beta|^2 > 0$.

Määritelmä 6.5. Kuvausta $\mathbb{D} \to \mathbb{D}$, joka on muotoa

$$z \mapsto \frac{\alpha z + \beta}{\overline{\beta} z + \overline{\alpha}},$$

missä $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ ja $|\alpha|^2 - |\beta|^2 > 0$, sanotaan Poincarén kiekon $\mathbb{D}$ Möbius-kuvaukseksi.

Poincarén kiekon Möbius-kuvaukset muodostavat ryhmän, jolle käytämme merkintää Möb($\mathbb{D}$).

Teoreema 6.6. *Kuvaus*

$$H\colon \text{Möb}(\mathbb{D}) \to \text{Möb}(\mathbb{H}), \quad \mu \mapsto h^{-1} \circ \mu \circ h$$

on ryhmäisomorfismi.

Todistus. Luennolla näytettiin, että $H(\mu) \in$ Möb($\mathbb{H}$) kaikilla $\mu \in$ Möb($\mathbb{D}$). Todistus oli lasku. Luennoilla näytettiin myös, että jos $\gamma \in$ Möb($\mathbb{H}$), niin $h \circ \gamma \circ h^{-1} \in$ Möb($\mathbb{D}$). Koska $H(h \circ \gamma \circ h^{-1}) = \gamma$, seuraa tästä, että H on surjektio. Selvästi H on injektiivinen ryhmähomomorfismi. □

Yllä olevan perusteella:

Lause 6.7. *Poincarén kiekon Möbius-kuvaukset ovat isometrioita.*

Esimerkki 6.8. Kierrot origon ympäri ovat Poincarén kiekon Möbius-kuvauksia: Olkoot $\alpha = e^{i\theta/2}$ ja $\beta = 0$. Tällöin $|\alpha|^2 - |\beta|^2 = 1 > 0$, joten $\gamma(z) = e^{i\theta/2} z / e^{-i\theta/2} = e^{i\theta} z$ on Poincarén kiekon Möbius-kuvaus.

Poincarén kiekon geodeesit

Kuvaus $h\colon \mathbb{H} \to \mathbb{D}$, $z \mapsto \frac{z-i}{iz-1}$, kuvaa ylemmän puolitason geodeesit Poincarén kiekon geodeeseiksi.

Lause 6.9. *Poincarén kiekon geodeesit ovat kiekon $\mathbb{D}$ halkaisijat sekä ne ympyrän kaaret kiekolla $\mathbb{D}$, jotka kohtaavat reunan $\partial\mathbb{D}$ kohtisuorassa.*

Todistus. Voidaan näyttää, että h on konformikuvaus, eli, että se säilyttää kulmat. Yhtälön $\alpha z\overline{z} + \beta z + \overline{\beta}\overline{z} + \gamma = 0$ ratkaisuja kompleksitasossa ovat suorat ja ympyrät. Tätä tietoa käyttämällä voidaan osoittaa, että h kuvaa kompleksitason suorat ja ympyrät kompleksitason suorille ja ympyröille. Aiemmin todettiin, että $h(\partial\mathbb{H}) = \partial\mathbb{D}$. Edelleen, ylemmän puolitason geodeeseja ovat ne suorat ja ympyrät, jotka ovat kohtisuorassa reunaa $\partial\mathbb{H}$ vastaan. Koska h on konformikuvaus, tästä seuraa, että h kuvaa ylemmän puolitason geodeesin reunaa $\partial\mathbb{D}$ vastaan kohtisuorassa olevaksi suoraksi tai ympyräksi. □

Ylemmän puolitason tapauksessa on usein hyödyllistä kuvata geodeesi Möbius-kuvauksella imaginääriakselille ja geodeesin piste z_0 pisteelle i. Seuraavan lauseen perusteella Poincarén kiekon tapauksessa on voimassa vastavanlainen tulos.

Lause 6.10. *Olkoon H Poincarén kiekon geodeesi ja olkoon $z_0 \in H$. Tällöin on olemassa Poincarén kiekon $\mathbb{D}$ Möbius-kuvaus, joka kuvaa geodeesin H reaaliakselille ja pisteen z_0 pisteelle 0.*

Todistus. Lisätään myöhemmin. □

Ympyrät Poincarén kiekolla

Aiemmin todistimme, että $C \subset \mathbb{H}$ on hyperbolinen ympyrä, jos ja vain jos se on euklidinen ympyrä. Vastaavanlainen tulos pätee Poincarén kiekolla:

Lause 6.11. *Olkoon $C \subset \mathbb{D}$. Tällöin C on hyperbolinen ympyrä, jos ja vain jos se on on euklidinen ympyrä.*

Todistus. Olkoon jälleen kerran

$$h\colon \mathbb{H} \to \mathbb{D}, \quad z \mapsto \frac{z-i}{iz-1}$$

kuvaus, jonka avulla määrittelimme hyperbolisen rakenteen Poincarén kiekolle. Kuvauksen h käänteiskuvaus $h^{-1}\colon \mathbb{D} \to \mathbb{H}$ määritellään samalla kaavalla kuin h. Koska h on isometria hyperbolisten metriikkojen suhteen, on C hyperbolinen ympyrä Poincarén kiekolla, jos ja vain jos $h^{-1}(C)$ on hyperbolinen ympyrä ylemmässä puolitasossa.

Oletetaan ensin, että C on euklidinen ympyrä. Tällöin $h^{-1}(C)$ on joko euklidinen ympyrä tai euklidinen suora ylemmässä puolitasossa. Koska kuvauksen h^{-1} nimittäjän nollakohta ei voi olla ympyrällä C (se ei ole Poincarén kiekolla), täytyy kuvan $h^{-1}(C)$ olla euklidinen ympyrä. Niinpä $h^{-1}(C)$ on hyperbolinen ympyrä aiemmin todistetun tuloksen perusteella. Tällöin $C = h(h^{-1}(C))$ on hyperbolinen ympyrä Poincarén kiekolla.

Oletetaan sitten, että C on hyperbolinen ympyrä. Tällöin $h^{-1}(C)$ on ylemmän puolitason hyperbolinen ympyrä, joten se on myös ylemmän puolitason euklidinen ympyrä. Niinpä $C = h(h^{-1}(C))$ on Poincarén kiekon euklidinen ympyrä. □

Lause 6.12. *Olkoon $C \subset \mathbb{D}$. Tällöin C on euklidinen origokeskinen ympyrä, jos ja vain jos se on hyperbolinen origokeskinen ympyrä. Olkoon r ympyrän C euklidinen säde ja r sen hyperbolinen säde. Tällöin*

$$r = \tanh(\frac{s}{2}) \text{ ja } s = \ln(\frac{1+r}{1-r}).$$

Todistus. Olkoot

$$A = \{z \in \mathbb{D} \mid |z| = r\} \text{ ja } B = \{z \in \mathbb{D} \mid d_{\mathbb{D}}(0, z) = s = \ln(\frac{1+r}{1-r})\}.$$

Osoitetaan, että $A = B$. Olkoon $\theta \in [0, 2\pi)$. Olkoon

$$r_\theta \colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad z \mapsto e^{i\theta} z,$$

kierto origon ympäri kulman θ verran. Tällöin r_θ on Poincarén kiekon isometria. Olkoon $w \in \mathbb{D}$. Tällöin $|w| < 1$ ja jollakin $\theta \in [0, 2\pi)$ pätee $|w| = e^{i\theta} w = r_\theta(w)$.

Oletetaan, että $w \in B$. Tällöin

$$d_{\mathbb{D}}(0, w) = d_{\mathbb{D}}(0, |w|) = \ln\Big(\frac{1+|w|}{1-|w|}\Big) = s.$$

Niinpä

$$|w| = \tanh(\frac{s}{2}) = r,$$

joten $w \in A$.

Oletetaan sitten, että $w \in A$. Tällöin $|w| = r$, joten

$$d_{\mathbb{D}}(0, |w|) = d_{\mathbb{D}}(0, r) = \ln\Big(\frac{1+r}{1-r}\Big) = s.$$

Siis $d_{\mathbb{D}}(0, w) = s$, joten $w \in B$. □

Pinta-ala Poincarén kiekolla

Olkoon U ylemmän puolitason osajoukko. Joukon U pinta-ala on

$$A_{\mathbb{H}}(U) = \int\int_U \frac{1}{(\mathrm{Im} z)^2} dz,$$

edellyttäen että yllä oleva integraali on olemassa. Käytämme taas kuvausta $h \colon \mathbb{H} \to \mathbb{D}$ voidaksemme määritellä pinta-alan Poincarén kiekolla. Tällöin Poincarén kiekon osajoukon V pinta-alaksi saadaan johdettua

$$A_{\mathbb{D}}(V) = \int\int_V \frac{4}{(1-(x^2+y^2))^2} dx dy.$$

Napakoordinaateista on usein hyötyä pinta-alan laskemisessa: Kirjoitetaan

$$x = r\cos\theta \text{ ja } y = r\sin\theta,$$

jolloin koordinaattimuutosta vastaava Jacobin determinantti on r. Napaakoordinaattien avulla kirjoitettuna Poincarén kiekon osajoukon V pinta-ala on

$$A_{\mathbb{D}}(V) = \int\int_V \frac{4r}{(1-r^2)^2} dr d\theta.$$

Lause 6.13. *Olkoon R Poincarén kiekon osajoukko. Tällöin*

$$A_{\mathbb{D}}(V) = A_{\mathbb{H}}(h^{-1}(V)),$$

missä $h^{-1}\colon \mathbb{D} \to \mathbb{H}$, $z \mapsto \frac{z-i}{iz-1}$.

Todistus. Kirjoitetaan $z = x + iy$, jolloin

$$h^{-1}(x+iy) = \frac{-2x}{x^2 + (1+y)^2} + i\frac{1-(x^2+y^2)}{x^2+(y+1)^2} = u(x,y) + iv(x,y).$$

Tällöin

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{2(x^2-(y+1)^2)}{(x^2+(1+y)^2)^2} \text{ ja } \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{4x(1+y)}{(x^2+(1+y)^2)^2},$$

joten

$$|Dh^{-1}(x,y)| = (\frac{\partial u}{\partial x})^2 + (\frac{\partial u}{\partial y})^2 = \frac{4}{(x^2+(1+y)^2)^2}.$$

Olkoon $f(x,y) = \frac{1}{y^2}$. Tällöin

$$(f \circ h^{-1})(x,y) = \Big(\frac{x^2+(y+1)^2}{1-(x^2+y^2)}\Big)^2.$$

Niinpä

$$A_{\mathbb{H}}(h^{-1}(V) = \int\int_{h^{-1}(V)} \frac{1}{y^2} dx dy = \int\int_V (f \circ h^{-1})(x,y)|Dh^{-1}(x,y)| dx dy.$$

Sijoittamalla huomataan, että yllä oleva integraali on

$$\int\int_V \Big(\frac{x^2+(y+1)^2}{1-(x^2+y^2)}\Big)^2 \frac{4}{(x^2+(1+y)^2)^2} dx dy = \int\int_V \frac{4}{(1-(x^2+y^2))^2} dx dy = A_{\mathbb{D}}(V).$$

□

Korollaari 6.14. *Olkoon $\mu \in \mathrm{Möb}(\mathbb{D})$. Olkoon $V \subset \mathbb{D}$. Tällöin $A_{\mathbb{D}}(V) = A_{\mathbb{D}}(\mu(V))$.*

Todistus.

$$A_{\mathbb{D}}(\mu(V)) = A_{\mathbb{H}}(h^{-1}\mu(V)) = A_{\mathbb{H}}(h^{-1}\mu h(h^{-1}V)) = A_{\mathbb{H}}(h^{-1}(V)) = A_{\mathbb{D}}(V).$$

□

7. Gauss - Bonnet lause

Hyperboliset monikulmiot

Euklidisessa geometriassa n-sivuisella monikulmiolla tarkoitetaan euklidisen tason osajoukkoa, jota rajoittavat n suoraa. Niinpä euklidisen monikulmion sivut ovat janoja. Hyperbolinen geodeesi määritellään vastaavasti.

Määritelmä 7.1. Olkoot $z, w \in \mathbb{H} \cup \partial\mathbb{H}$. Tällöin on olemassa yksikäsitteinen pisteitten z ja w kautta kulkeva geodeesi. Käytämme merkintää $[z, w]$ geodeesin sille osalle, joka yhdistää pisteet z ja w. Kutsumme osaa $[z, w]$ pisteitten z ja w väliseksi *geodeesiksi* tai *(hyperboliseksi) janaksi.*

Määritelmä 7.2. Olkoot $z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{H} \cup \partial\mathbb{H}$. *Hyperbolinen n-kulmio P*, jonka kärjet ovat pisteissä $z_1, \ldots, z_n$, on ylemmän puolitason alue (jolla on äärellinen pinta-ala), jota rajoittavat janat

$$[z_1, z_2], \ldots, [z_{n-1}, z_n], [z_n, z_1].$$

Huomautus 7.3. Huomaa, että jotkut hyperbolisen n-kulmion kärjistä saattavat olla reunalla $\partial\mathbb{H}$. Jos n-kulmion kaikki kärjet ovat reunalla $\partial\mathbb{H}$, kutsumme n-kulmiota *reunakulmioksi.* Huomaa, että reunalla olevaa kärkeä vastaava kulma on nolla astetta: Kaikki geodeesit ovat kohtisuorassa reunaa $\partial\mathbb{H}$ vastaan. Jos kaksi geodeesia leikkaa reunan pisteessä, täytyy niiden välisen kulman olla nolla.

Gauss - Bonnet lause kolmioille

Gauss - Bonnet lauseesta on olemassa monenlaisia eri versioita. Hyperbolisessa geometriassa lause kertoo, kuinka hyperbolisen monikulmion pinta-ala riippuu sen kulmista. Euklidisessa geometriassa vastaavanlainen tulos ei päde. Sovellamme Gauss-Bonnet lausetta myöhemmin kun opiskelemme ylemmän puolitason laatoituksia.

Teoreema 7.4. (**Gauss-Bonnet lause hyperbolisille kolmioille**) *Olkoon $\triangle$ ylemmän puolitason kolmio, jonka kulmat ovat α, β ja γ. Tällöin*

$$A_{\mathbb{H}}(\triangle) = \pi - (\alpha + \beta + \gamma). \tag{14}$$

Huomautus 7.5.

(1) Euklidisessa geometriassa kolmion kulmien summa on π. (Oletetaan, että Eukleideen ensimmäiset neljä aksioomaa ovat voimassa. Tällöin Eukleideen yhdensuuntaisuusaksiooma on voimassa, jos ja vain jos kaikkien kolmioitten kulmien summa on π.) Koska hyperbolisen kolmion pinta-ala on positiivinen, seuraa kaavasta 14, että hyperbolisen kolmion kulmien summa on alle π.

(2) Kaavasta 14 seuraa myös, että hyperbolisen kolmion pinta-ala on korkeintaan π. Hyperbolisen kolmion kulmien summa on täsmälleen π, jos ja vain jos kaikki kolmion kärjet ovat reunalla $\partial\mathbb{H}$.

(3) Euklidisessa geometriassa on olemassa kolmioita, joilla on samat kulmat mutta eri pinta-ala. Hyperbolisessa geometriassa tämä ei ole mahdollista.

Todistus. Oletetaan ensin, että ainakin yksi kolmion $\triangle$ kärjistä on reunalla $\partial\mathbb{H}$, jolloin tätä kärkeä vastaava kulma on 0. Möbius-kuvauksen avulla voimme siirtää tämän kärjen pisteeseen ∞ muuttamatta kolmion $\triangle$ pinta-alaa tai kulmia. Voimme siis olettaa, että yksi kolmion $\triangle$ kärjistä on pisteessä ∞. Voimme myös olettaa, että kahta muuta kärkeä yhdistävän ympyrän keskipiste on origo. (Jos näin ei ole, voimme siirtää kolmion $\triangle$ Möbius-kuvauksen $z \mapsto z + b$ avulla, missä b on sopiva vakio.) Soveltamalla tarvittaessa Möbius-kuvausta $z \mapsto kz$ voimme olettaa, että ympyrän säde on 1. Niinpä

$$\begin{aligned}
A_{\mathbb{H}}(\triangle) &= \iint_{\triangle} \tfrac{1}{y^2} dxdy \\
&= \int_a^b \left(\int_{\sqrt{1-x^2}}^{\infty} \tfrac{1}{y^2} dy \right) dx \\
&= \int_a^b \left(\tfrac{-1}{y} \Big|_{\sqrt{1-x^2}}^{\infty} \right) dx \\
&= \int_a^b \tfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx \\
&= \int_{\pi-\alpha}^{\beta} -1 d\theta \ \ (\text{sijoittamalla } \ x = \cos\theta) \\
&= \pi - (\alpha + \beta).
\end{aligned}$$

Olemme todistaneet yhtälön 14 tilanteessa, jossa ainakin yksi kolmion kärjistä on reunalla $\partial\mathbb{H}$.

Oletetaan seuraavaksi, ettei yksikään kolmion $\triangle$ kärjistä ole reunalla $\partial\mathbb{H}$. Olkoot kolmion $\triangle$ kärjet A, B ja C ja kärkiä vastaavat kulmat α, β ja γ. Voimme olettaa, että kolmion $\triangle$ kärkien A ja C välinen sivu on pystysuoralla geodeesilla. (Jos näin ei ole, voidaan kolmio $\triangle$ kuvata Möbius-kuvauksella niin, että haluttu sivu saadaan pystysuoraan.) Voimme olettaa, että kärki A on alempana kuin kärki C. Olkoon δ kärjen B kautta kulkevan pystysuoran geodeesin ja sivun CB välinen kulma. Voimme nyt konstruoida kaksi kolmiota, joilla kummallakin on kärki pisteessä ∞; tällaisia kolmioita ovat kolmio $AB\infty$ ja kolmio $CB\infty$. Tällöin

$$A_{\mathbb{H}}(\triangle) = A_{\mathbb{H}}(ABC) = A_{\mathbb{H}}(AB\infty) - A_{\mathbb{H}}(BC\infty),$$

missä

$$A_{\mathbb{H}}(AB\infty) = \pi - (\alpha + (\beta + \delta))$$

ja

$$A_{\mathbb{H}}(BC\infty) = \pi - ((\pi - \gamma) + \delta).$$

Niinpä

$$A_{\mathbb{H}}(\triangle) = \pi - (\alpha + \beta + \gamma).$$

□

Gauss-Bonnet lause voidaan yleistää koskemaan hyperbolisia monikulmioita.

Teoreema 7.6. *Olkoon P hyperbolinen n-kulmio, jonka kärjet ovat $v_1, \dots, v_n$ ja vastaavat kulmat $\alpha_1, \dots, \alpha_n$. Tällöin n-kulmion P pinta-ala on*

$$A_{\mathbb{H}}(P) = (n-2)\pi - (\alpha_1 + \cdots + \alpha_n). \tag{15}$$

Todistus. Todistuksen idea on suraava: Jaa P kolmioihin. Sovella Teoreemaa 7.4 erikseen jokaiseen kolmioon ja laske yhteen kolmioitten pinta-alat. □

Ylemmän puolitason laatoitukset säännöllisillä monikulmioilla

Säännöllinen hyperbolinen n-kulmio on hyperbolinen n-kulmio, jonka kaikki sivut ovat saman pituisia ja jonka kaikki kulmat ovat saman suuruisia. Pohdimme seuraavaa ongelmaa: Onko mahdollista laatoittaa ylempi puolitaso säännöllisillä n-kulmioilla siten, että jokaisessa kärjessä kohtaa täsmälleen k n-kulmiota?

Aiemmin todettiin, että euklidisen tason $\mathbb{R}^2$ ainoat mahdolliset laatoitukset säännöllisillä euklidisilla monikulmioilla ovat seuraavat:

(1) Laatoitus tasasivuisilla kolmioilla, jolloin jokaisessa kärjessä kohtaa 6 kolmiota.
(2) Laatoitus neliöillä, jolloin jokaisessa kärjessä kohtaa 4 neliötä.
(3) Laatoitus säännöllisillä kuusikulmioilla, jolloin jokaisessa kärjessä kohtaa 3 kuusikulmiota.

Todistetaan yllä oleva euklidisia laatoituksia koskeva väite seuraavasti: Oletetaan, että taso $\mathbb{R}^2$ voidaan laatoittaa säännöllisillä n-kulmioilla siten, että jokaisessa kärjessä kohtaa täsmälleen k n-kulmiota. Jaetaan säännöllinen n-kulmio, jonka kärjet ovat $P_0, P_1, \dots, P_{n-1}$, kolmioihin yhdistämällä kärki P_0 janalla muihin kärkiin. Tällöin saadaan yhteensä $n-2$ kolmiota. Koska euklidisen kolmion kulmien summa on π, on näiden kolmioitten kulmien summa yhteensä $(n-2)\pi$. Tämä summa on sama kuin säännöllisen n-kulmion kulmien summa. Siis säännöllisen n-kulmion kulma on $\frac{(n-2)\pi}{n}$.

Koska jokaisessa kärjessä kohtaa täsmälleen k kappaletta säännöllisiä n-kulmioita, on

$$k(\frac{n-2}{n}\pi) = k\pi(1-\frac{2}{n}) = 2\pi,$$

mistä seuraa, että

$$\frac{1}{k} + \frac{1}{n} = \frac{1}{2}.$$

Kokeilemalla löydetään kolme ratkaisua:

(1) $n = 3$, $k = 6$,
(2) $n = 4$, $k = 4$,
(3) $n = 6$, $k = 3$.

Nämä ratkaisut vastaavat tason laatoituksia tasasivuisilla kolmioilla, neliöillä ja säännöllisillä kuusikulmioilla. Oletetaan sitten, että

$$\frac{1}{k} + \frac{1}{n} = \frac{1}{2}.$$

Tällöin

$$n = \frac{2k}{k-2}.$$

Jos $k = 5$, on $n = \frac{10}{3} \notin \mathbb{N}$. Huomataan, että kuvaus $f\colon k \mapsto \frac{2k}{k-2}$ on aidosti vähenevä. Koska $f(7) = \frac{14}{5} < 3$, pätee $f(k) \notin \mathbb{N}$ kun $k \geq 7$. Siis löytämämme ratkaisut ovat ainoat mahdolliset.

Hyperbolisessa geometriassa tilanne on paljon mielenkiintoisempi. On olemassa äärettömän monta tapaa laatoittaa hyperbolinen taso säännöllisillä hyperbolisilla monikulmioilla!

Teoreema 7.7. *Ylempi puolitaso voidaan laatoittaa säännöllisillä hyperbolisilla n-kulmioilla siten, että jokaisessa kärjessä kohtaa täsmälleen k n-kulmiota, jos ja vain jos*

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{k} < \frac{1}{2}. \tag{16}$$

Todistus. Todistamme ainoastaan, että jos laatoitus on olemassa, niin lukujen n ja k pitää toteuttaa yhtälö 16. Todistuksen toinen suunta on vaikeampi. Olkoon α säännöllisen n-kulmion P kulma. Koska jokaisessa kärjessä kohtaa k säännöllistä n-kulmiota, seuraa tästä että $\alpha = 2\pi/k$. Koska n-kulmion P pinta-ala on positiivinen, seuraa Teoreemasta 7.6, että

$$(n-2)\pi - n\frac{2\pi}{k} > 0.$$

Niinpä

$$n\pi > 2\pi + n\frac{2\pi}{k},$$

joten kun jaetaan molemmat puolet termillä $n2\pi$, saadaan

$$\frac{1}{2} > \frac{1}{n} + \frac{1}{k}.$$

□

Olemme todistuksissa ohittaneet hyperbolisten monikulmioitten olemassaoloa koskevat kysymykset. Seuraava tulos antaa vastauksen olemassaolokysymyksiin:

Lause 7.8. *Olkoot $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ sellaisia, että*

$$(n-2)\pi - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k > 0.$$

Tällöin on olemassa hyperbolinen n-kulmio, jonka kulmat ovat $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$.

Todistus. Katso [**?**], Teoreema 7.16.2. □

8. Hyperbolista trigonometriaa

Euklidisessa geometriassa on monia tuttuja lauseita, jotka kertovat kolmion sivujen ja kulmien välisistä suhteista. Tällaisia lauseita ovat esimerkiksi Pythagoraan lause, sinilause ja kosinilause. Tässä luvussa tutustumme vastaavanlaisiin tuloksiin hyperbolisessa geometriassa.

Pythagoraan lause

Euklidisessa geometriassa Pythagoraan lause kertoo, miten suorakulmaisen kolmion sivujen pituuksien suhteet riippuvat kolmion kulmista. Seuraavaksi todistamme vastaavan lauseen hyperbolisessa geometriassa:

Teoreema 8.1. *(***Pythagoraan lause hyperbolisille kolmioille***) Olkoon $\triangle$ kolmio ylemmässä puolitasossa. Olkoot kolmion $\triangle$ kulmat α, β ja $\pi/2$ ja niitä vastaavien vastakkaisten sivujen hyperboliset pituudet a, b ja c. Tällöin*

$$\cosh c = \cosh a \cosh b. \tag{17}$$

Todistus. Voimme olettaa, että kolmion $\triangle$ kulmaa $\pi/2$ vastaava kärki on pisteessä i ja sivu, jonka pituus on b, on imaginääriakselilla. (Tarvittaessa voimme siirtää kolmion Möbius-kuvauksen avulla.) Tästä seuraa, että sivu, jonka pituus on a, on puoliympyrällä, jonka keskipiste on origo ja säde on 1. Voimme päätellä, että yksi kolmion kärjistä on pisteessä ki, missä $k > 0$. Kolmion kolmas kärki on pisteessä $s + it$ puoliympyrällä, jonka keskipiste on origo ja säde on 1.

Lauseesta 5.14 seuraa, että kaikilla $z, w \in \mathbb{H}$,

$$\cosh d_{\mathbb{H}}(z, w) = 1 + \frac{|z - w|^2}{2\mathrm{Im}(z)\mathrm{Im}(w)}.$$

Soveltamalla yllä olevaa kaavaa kolmion $\triangle$ sivuihin saadaan:

$$\begin{aligned}
\cosh a &= 1 + \tfrac{|s+i(t-1)|^2}{2t} = 1 + \tfrac{s^2+(t-1)^2}{2t} = \tfrac{1}{t},\\
\cosh b &= 1 + \tfrac{(k-1)^2}{2k} = \tfrac{1+k^2}{2k},\\
\cosh c &= 1 + \tfrac{|s+i(t-k)|^2}{2tk} = 1 + \tfrac{s^2+(t-k)^2}{2tk} = \tfrac{1+k^2}{2tk}.
\end{aligned}$$

Ylimmän ja alimman yhtälön johtamisessa on käytetty tietoa, että $s^2 + t^2 = 1$ kun $s + it$ on yksikköympyrän piste. Yhdistämällä yllä olevat yhtälöt saadaan

$$\cosh c = \cosh a \cosh b.$$

□

Huomautus 8.2. Oletetaan, että a, b ja c ovat kaikki suuria. Tällöin $c \approx a + b - \ln 2$. Niinpä hyperbolisessa geometriassa hypotenuusan pituuden ei tarvitse olla olennaisesti pienempi kuin kateettien pituuksien summa. Pythagoraan lause seuraa myös suoraan luennoilla todistetusta kosinilauseesta.

Suorakulmaiset kolmiot

Oletetaan ensin, että $\triangle$ on euklidinen suorakulmainen kolmio. Tällöin

(1) $\sin \alpha = a/c$,

(2) $\cos\alpha = b/c$,
(3) $\tan\alpha = a/b$.

Seuraavaksi todistamme vastaavanlaisen tuloksen suorakulmaiselle hyperboliselle kolmiolle:

Lause 8.3. *Olkoon $\triangle$ hyperbolinen kolmio ylemmässä puolitasossa $\mathbb{H}$. Olkoot kolmion $\triangle$ kulmat α, β ja $\pi/2$ ja niitä vastaan olevien sivujen pituudet a, b ja c. Tällöin*

(1) $\sin\alpha = \sinh a/\sinh c$,
(2) $\cos\alpha = \tanh b/\tanh c$,
(3) $\tan\alpha = \tanh a/\sinh b$.

Todistus. Kuten aiemmin, voimme olettaa, että kolmion $\triangle$ kärjet ovat pisteissä i, ki ja $s+it$, missä $s+it$ on piste origokeskisellä yksikköympyrällä, ja että kolmion $\triangle$ suora kulma vastaa kärkeä i. (Tarpeen vaatiessa voimme siirtää kolmion $\triangle$ Möbius-kuvauksen avulla.) Oletetaan, että $s > 0$. (Tapauksen $s < 0$ todistus on samanlainen.)

On olemassa yksikäsitteinen pisteet ki ja $s+it$ yhdistävä geodeesi. Tämä geodeesi on puoliympyrä C, jonka keskipiste on reaaliakselilla. Olkoon keskipiste $-x < 0$. (Jos keskipiste on posit. reaaliakselilla, on todistus samanlainen.) Pisteitten x ja ki kautta kulkeva euklidinen suora leikkaa reaaliakselin kulmassa α. Jana pisteestä x pisteeseen ki on puoliympyrän C säde. Samaten jana pisteestä x pisteeseen $s+it$ on pyoliympyrän C säde. Laskemalla näiden säteitten pituudet saadaan

$$k^2 + x^2 = (s+x)^2 + t^2,$$

joten

$$k^2 = s^2 + 2sx + t^2 = 2sx + 1. \tag{18}$$

Tarkastelemalla euklidista kolmiota, jonka kärjet ovat $-x$, ki ja 0, huomataan, että

$$\tan\alpha = \frac{k}{x} = \frac{2ks}{k^2-1}. \tag{19}$$

Teoreeman 8.1 (Hyperbolinen Pythagoraan lause) todistuksessa johdettiin kaavat hyperboliselle kosinille ja sinille. Näistä kaavoista seuraa, että

$$\sinh b = \frac{k^2-1}{2k} \quad \text{ja} \quad \tanh a = s.$$

Kaavasta 19 seuraa nyt, että

$$\tan\alpha = \frac{\tanh a}{\sinh b},$$

joten saimme lauseen kohdan (3) todistettua. Kohtien (1) ja (2) todistukset jätetään harjoitustehtäviksi. □

Harjoitustehtävä 8.4. *Todista Lauseen 8.3 kohdat* (1) *ja* (2).

Kolmio, jolla on kärki reunalla

Tarkaistellaan hyperbolista suorakulmaista kolmiota, jonka kärjistä yksi on reunalla $\partial\mathbb{H}$. Tällöin kolmion kulmat ovat α, 0 ja $\pi/2$. Ainoastaan yhdellä kolmion sivuista on äärellinen pituus. Tämä sivu on kulmia α ja $\pi/2$ vastaavia kärkiä yhdistävä sivu. Voidaan kirjoittaa erilaisia kaavoja, jotka kertovat kuinka kulma α riippuu tämän äärellisen pituisen sivun pituudesta.

Lause 8.5. *Olkoon $\triangle$ hyperbolinen kolmio, jonka kulmat ovat α, 0 ja $\pi/2$. Olkoon a kolmion $\triangle$ ainoan äärellisen pituisen sivun pituus. Tällöin*

(1) $\sin\alpha = \frac{1}{\cosh a}$,
(2) $\cos\alpha = \frac{1}{\coth a}$,
(3) $\tan\alpha = \frac{1}{\sinh a}$.

Todistus. Yhtälöt (1), (2) ja (3) ovat yhtäpitäviä, joten riittää todistaa yksi niistä. Todistamme ensimmäisen yhtälön.

Voimme olettaa, että kolmion $\triangle$ reunakärki on pisteessä ∞ ja että kulmaa $\pi/2$ vastaava kärki on pisteessä i. Kolmion kolmas kärki on tällöin pisteessä $\cos\alpha + i\sin\alpha$.

Palautetaan mieliin, että pisteitten $z, w \in \mathbb{H}$ hyperboliselle etäisyydelle pätee

$$\cosh d_{\mathbb{H}}(z,w) = 1 + \frac{|z-w|^2}{2\mathrm{Im}(z)\mathrm{Im}(w)}.$$

Kun $z = i$ ja $w = \cos\alpha + i\sin\alpha$, saadaan

$$\cosh a = \cosh d_{\mathbb{H}}(z,w) = 1 + \frac{2(1-\sin\alpha)}{2\sin\alpha} = \frac{1}{\sin\alpha}.$$

□

Kosinilauseet

Lemma 8.6. *Olkoot $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{D}$ hyperbolisen kolmion kärjet. Tällöin on olemassa hyperbolinen isometria p, joka säilyttää kulmat, ja jolle $p(v_1) = 0$, $p(v_2) = r > 0$ ja $p(v_3) = se^{i\varphi}$, missä $s > 0$ ja $0 < \varphi < \pi$.*

Todistus. Etsitään ensin $p_1 \in \text{Möb}(\mathbb{D})$,

$$p_1(z) = \frac{\alpha z + \beta}{\bar\beta z + \bar\alpha},$$

missä $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $|\alpha|^2 - |\beta|^2 > 0$, $p_1(v_1) = 0$ ja $p_1(v_2) = r > 0$. Olkoon $\beta = -\alpha v_1$, joten

$$|\alpha|^2 - |\beta|^2 = |\alpha|^2(1 - |v_1|^2) > 0$$

ja

$$p_1(z) = \frac{\alpha(z - v_1)}{\bar\alpha(-\bar v_1 z + 1)}.$$

Niinpä $p_1(v_1) = 0$. Kirjoitetaan sitten $\alpha = |\alpha|e^{i\theta}$, missä θ valitaan siten, että $p_1(v_2) = r > 0$.

Jos $\mathrm{Im}(p_1(v_3)) > 0$, niin valitaan $p = p_1$. Jos $\mathrm{Im}(p_1(v_3)) < 0$, niin yhdistetään p_1 kulmat säilyttävään isometriaan

$$f\colon \mathbb{D} \to \mathbb{D}, \ \ z \mapsto \bar{z},$$

ja valitaan $p = f \circ p_1$.

□

Hyperbolisten kosini- ja sinilauseitten todistuksissa tarvitaan seuraavia hyperbolisten funktioitten ominaisuuksia:

Lemma 8.7. *Hyperbolisille funktioille pätevät seuraavat kaavat:*

(1) $2\cosh x \sinh x = \sinh 2x$,
(2) $\sinh^2 x = \frac{1}{2}\cosh 2x - \frac{1}{2}$,
(3) $\cosh^2 x = \frac{1}{2}\cosh 2x + \frac{1}{2}$,
(4) $\sinh^2 x \cosh^2 y + \cosh^2 x \sinh^2 y = \frac{1}{2}\Big(\cosh 2x \cosh 2y - 1\Big)$.

Todistus. Harjoitustehtävä. □

Euklidisessa geometriassa on voimassa seuraava kosinilause: Olkoon $\triangle$ euklidinen kolmio, jonka kulmat ovat α, β ja γ ja kulmien vastaisten sivujen pituudet a, b ja c. Tällöin

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma.$$

Hyperbolisessa geometriassa on voimassa vastaava tulos:

Lause 8.8. (Kosinilause I) *Olkoon $\triangle$ hyperbolinen kolmio, jonka kulmat ovat α, β ja γ ja kulmien vastaisten sivujen pituudet a, b ja c. Oletetaan, että kaikki sivut ovat äärellisen pituisia. Tällöin*

$$\cosh c = \cosh a \cosh b - \sinh a \sinh b \cos\gamma.$$

Todistus. Riittää todistaa tapaus $\Delta \subset \mathbb{D}$. Tapaus $\Delta \subset \mathbb{H}$ seuraa sitten kuvausta $h\colon \mathbb{H} \to \mathbb{D}$ käyttämällä. Lemman 8.6 perusteella voidaan olettaa, että $v_1 = 0$, $v_2 = r > 0$ ja $v_3 = se^{i\alpha}$, missä $s > 0$ ja $\alpha \in (0, \pi)$. Tällöin

$$c = d_{\mathbb{D}}(0, r) = \ln\big(\frac{1+r}{1-r}\big),$$

joten $r = \tanh(\frac{c}{2})$. Samoin

$$b = d_{\mathbb{D}}(0, se^{i\alpha}) = d_{\mathbb{D}}(0, s),$$

joten $s = \tanh(\frac{b}{2})$. Euklidisen kosinilauseen perusteella

$$|v_3 - v_2|^2 = r^2 + s^2 - 2rs\cos\alpha,$$

joten

$$|v_3 - v_2|^2 = \tanh^2(\frac{c}{2}) + \tanh^2(\frac{b}{2}) - 2\tanh(\frac{c}{2})\tanh(\frac{b}{2})\cos\alpha.$$

Toisaalta Harjoitustehtävän 6.3 perusteella

$$\frac{|v_2 - v_3|^2}{(1-|v_2|^2)(1-|v_3|^2)} = \frac{|v_2 - v_3|^2}{(1-r^2)(1-s^2)} = \sinh^2(\frac{1}{2}d_{\mathbb{D}}\big(v_2, v_3)\big) = \sinh^2(\frac{a}{2}).$$

Niinpä

$$|v_2 - v_3|^2 = (1-r^2)(1-s^2)\sinh^2(\frac{a}{2}) = \cosh^{-2}(\frac{c}{2})\cosh^{-2}(\frac{b}{2})\sinh^2(\frac{a}{2}).$$

Yhdistämällä yhtälöt termille $|v_2 - v_3|^2$ nähdään, että

$$\sinh^2(\frac{a}{2})$$

on yhtä kuin

$$\sinh^2(\frac{c}{2})\cosh^2(\frac{b}{2}) + \sinh^2(\frac{b}{2})\cosh^2(\frac{c}{2}) - 2\sinh(\frac{c}{2})\sinh(\frac{b}{2})\cosh(\frac{c}{2})\cosh(\frac{b}{2})\cos\alpha.$$

Hyperbolisten funktioitten ominaisuuksien perusteella saadaan

$$\frac{1}{2}\cosh a - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(\cosh c\cosh b - 1) - 2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\sinh c\sinh b\cos\alpha,$$

joten

$$\cosh a = \cosh b\cosh c - \sinh c\sinh b\cos\alpha.$$

□

Hyperbolisille kolmioille on voimassa myös toinen kosinilause:

Lause 8.9. (Kosinilause II) *Olkoon $\triangle$ hyperbolinen kolmio, jonka kulmat ovat α, β ja γ ja kulmien vastaisten sivujen pituudet a, b ja c. Tällöin*

$$\cosh c = \frac{\cos\alpha\cos\beta + \cos\gamma}{\sin\alpha\sin\beta}.$$

Todistus. Kirjoitetaan $A = \cosh a$, $B = \cosh b$, $C = \cosh c$. Ensimmäisen kosinilauseen perusteella

$$C = AB - \sinh a\sinh b\cos\gamma.$$

Kirjoitetaan kaikki toisen kosinilauseen termit termien A, B ja C avulla. Tällöin

$$\cos\gamma = \frac{AB - C}{\sqrt{(B^2-1)(A^2-1)}},$$

$$\cos\alpha = \frac{BC - A}{\sqrt{(C^2-1)(B^2-1)}},$$

$$\cos\beta = \frac{AC - B}{\sqrt{(C^2-1)(A^2-1)}},$$

$$\sin\alpha = \sqrt{\frac{1 + 2ABC - (A^2+B^2+C^2)}{(C^2-1)(B^2-1)}},$$

ja

$$\sin\beta = \sqrt{\frac{1 + 2ABC - (A^2+B^2+C^2)}{(C^2-1)(A^2-1)}}.$$

Sijoittamalla ja sieventämällä nähdään, että

$$\frac{\cos\gamma + \cos\alpha\cos\beta}{\sin\alpha\sin\beta} = C = \cosh c.$$

□

Huomautus 8.10. Jälkimmäisellä kosinilauseella ei ole vastinetta euklidisessa geometriassa. Huomaa, että toisen kosinilauseen avulla on mahdollista laskea hyperbolisen kolmion sivujen pituudet, kun kolmion kulmat tunnetaan. Euklidisessa geometriassa kolmion kulmat eivät määrää sen sivuja.

Sinilause

Kerrataan euklidisen geometrian sinilause: Olkoon $\triangle$ euklidinen kolmio, jonka kulmat ovat α, β ja γ ja kulmien vastaisten sivujen pituudet a, b ja c. Tällöin

$$\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\gamma}{c}.$$

Hyperbolisille kolmioille voidaan todistaa vastaavanlainen tulos:

Lause 8.11. (Sinilause) *Olkoon $\triangle$ hyperbolinen kolmio, jonka kulmat ovat α, β ja γ ja kulmien vastaisten sivujen pituudet a, b ja c. Tällöin*

$$\frac{\sin\alpha}{\sinh a} = \frac{\sin\beta}{\sinh b} = \frac{\sin\gamma}{\sinh c}.$$

Todistus. Kirjoitetaan taas $A = \cosh a$, $B = \cosh b$, $C = \cosh c$. Ensimmäisen kosinilauseen perusteella

$$A = BC - \sinh c \sinh b \cos\alpha.$$

Koska lauseen tilanteessa sekä sinifunktiot että hyperboliset sinifunktiot saavat ainoastaan positiivisia arvoja, riittää osoittaa, että

$$\frac{\sin^2\alpha}{\sinh^2 a} = \frac{\sin^2\beta}{\sinh^2 b} = \frac{\sin^2\gamma}{\sinh^2 c}.$$

Ensimmäisen kosinilauseen perusteella

$$\sin^2\gamma = 1 - \cos^2\gamma = 1 - \left(\frac{BA - C}{\sinh a \sinh b}\right)^2,$$

joten

$$\sin^2\gamma \sinh^2 a \sinh^2 b = (A^2-1)(B^2-1) - (AB-C)^2.$$

Sieventämällä ja jakamalla yhtälön molemmat puolet termillä $\sinh^2 a \sinh^2 b \sinh^2 c$ nähdään, että

$$\frac{\sin^2\gamma}{\sinh^2 c} = \frac{1 + 2ABC - (A^2+B^2+C^2)}{\sinh^2 a \sinh^2 b \sinh^2 c}.$$

Yllä olevan yhtälön oikea puoli ei muutu, jos permutoidaan kulmia α, β ja γ. Niinpä myöskään yhtälön vasen puoli ei saa muuttua, jos permutoidaan kulmia α, β ja γ. Tästä seuraa, että

$$\frac{\sin^2\alpha}{\sinh^2 a} = \frac{\sin^2\beta}{\sinh^2 b} = \frac{\sin^2\gamma}{\sinh^2 c}.$$

□

9. Möbius-kuvausten kiintopisteet

Kiintopisteet

Palautetaan mieliin, että kuvausta

$$\gamma\colon \mathbb{H} \to \mathbb{H}, \quad z \mapsto \frac{az+b}{cz+d},$$

missä $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ ja $ad - bc > 0$, sanotaan ylemmän puolitason Möbius-kuvaukseksi. Tässä luvussa keskitymme Möbius-kuvausten luokitteluun. Möbius-kuvauksia on kolmenlaisia; parabolisia, elliptisiä ja hyperbolisia.

Olkoon $z_0 \in \mathbb{H} \cup \partial\mathbb{H}$. Sanomme, että z_0 on kuvauksen γ *kiintopiste*, jos

$$\gamma(z_0) = \frac{az_0+b}{cz_0+d} = z_0. \tag{20}$$

Luokittelemme Möbius-kuvauksen sen perusteella miten monta kiintopistettä sillä on ja ovatko kiintopisteet ylemmässä puolitasossa $\mathbb{H}$ vaiko reunalla $\partial\mathbb{H}$. Identtinen kuvaus on Möbius-kuvaus, jolle kaikki pisteet ovat kiintopisteitä. Tässä luvussa oletamme, että γ ei ole identtinen kuvaus.

Tarkastellaan ensin tapausta, missä $\infty \in \partial\mathbb{H}$ on kuvauksen γ kiintopiste. Kirjoitetaan

$$\gamma(z) = \frac{a + b/z}{c + d/z}.$$

Kun $z \to \infty$, $1/z \to 0$. Niinpä $\gamma(\infty) = a/c$. Piste ∞ on kuvauksen γ kiintopiste, jos ja vain jos $\gamma(\infty) = \infty$. Tämä puolestaan on mahdollista, jos ja vain jos $c = 0$.

Oletetaan sitten, että ∞ on kuvauksen γ kiintopiste, jolloin $c = 0$. Mitä muita kiintopisteitä kuvauksella γ voi olla? Koska $c = 0$, on

$$\gamma(z_0) = \frac{a}{d} z_0 + \frac{b}{d}.$$

Huomataan, että myös $z_0 = b/(d-a)$ on kuvauksen γ kiintopiste. (Huomaa, että tämä piste on ∞, jos $a = d$. Piste on reaaliakselilla, jos $a \neq d$.) Jos siis ∞ on kuvauksen γ kiintopiste, voi kuvauksella γ olla korkeintaan yksi toinen kiintopiste ja tämä toinenkin kiintopiste on reunalla $\partial\mathbb{H}$.

Tarkastellaan seuraavasti tilannetta, missä ∞ ei ole kuvauksen γ kiintopiste. Tässä tapauksessa $c \neq 0$. Kertomalla yhtälö 20 luvulla $cz_0 + d$ huomataan, että z_0 on kuvauksen γ kiintopiste, jos ja vain jos

$$cz_0^2 + (d-a)z_0 - b = 0. \tag{21}$$

Yhtälö 20 on reaalikertoiminen toisen asteen yhtälö. Niinpä sillä on joko (1) yksi tai kaksi reaalista ratkaisua tai (2) kaksi kompleksiratkaisua, jotka ovat toistensa kompleksikonjugaatteja. Jälkimmäisessä tapauksessa ainoastaan toinen ratkaisu on ylemmässä puolitasossa. Olemme todistaneet:

Lause 9.1. *Olkoon γ ylemmän puolitason $\mathbb{H}$, oletetaan, että γ ei ole identtinen kuvaus. Tällöin kuvauksella γ on joko*

(1) *kaksi kiintopistettä reunalla $\partial\mathbb{H}$ eikä yhtään ylemmässä puolitasossa $\mathbb{H}$,*

(2) *yksi kiintopiste reunalla* $\partial\mathbb{H}$ *eikä yhtään ylemmässä puolitasossa* $\mathbb{H}$*,*
(3) *ei yhtään kiintopistettä reunalla* $\partial\mathbb{H}$ *ja yksi kiintopiste ylemmässä puolitasossa* $\mathbb{H}$*.*

Korollaari 9.2. *Olkoon* γ *ylemmän puolitason Möbius-kuvaus, jolla on vähintään kolme kiintopistettä. Tällöin* γ *on identtinen kuvaus (eli kaikki pisteet ovat kiintopisteitä).*

Määritelmä 9.3. Olkoon γ ylemmän puolitason $\mathbb{H}$ Möbius-kuvaus. Sanomme, että

(1) γ on *hyperbolinen*, jos sillä on kaksi kiintopistettä reunalla $\partial\mathbb{H}$ eikä yhtään ylemmässä puolitasossa $\mathbb{H}$,
(2) γ on *parabolinen*, jos sillä on yksi kiintopiste reunalla $\partial\mathbb{H}$ eikä yhtään ylemmässä puolitasossa $\mathbb{H}$,
(3) γ on *elliptinen*, jos sillä on yksi kiintopiste ylemmässä puolitasossa $\mathbb{H}$ eikä yhtään reunalla $\partial\mathbb{H}$.

Harjoitustehtävä 9.4. *Etsi seuraavien ylemmän puolitason Möbius-kuvausten kiintopisteet joukossa* $\mathbb{H} \cup \partial\mathbb{H}$*:*

$$\gamma_1(z) = \frac{2z+5}{-3z-1}, \quad \gamma_2(z) = 7z+6, \quad \gamma_3(z) = -\frac{1}{z}, \quad \gamma_4(z) = \frac{z}{z+1}.$$

Luokittele kukin kuvaus γ_i*,* $1 \leq i \leq 4$*, hyperboliseksi, paraboliseksi tai elliptiseksi.*

Möbius-kuvaukset ja matriisit

Olkoot γ_1 ja γ_2 ylemmän puolitason Möbius-kuvauksia,

$$\gamma_1(z) = \frac{a_1 z + b_1}{c_1 z + d_1}, \quad \gamma_2(z) = \frac{a_2 z + b_2}{c_2 z + d_2}.$$

Kuvausten γ_1 ja γ_2 yhdiste $\gamma_2 \circ \gamma_1 = \gamma_2\gamma_1$ on myös ylemmän puolitason Möbius-kuvaus;

$$\gamma_2\gamma_1(z) = \frac{a_2\left(\frac{a_1 z + b_1}{c_1 z + d_1}\right) + b_2}{c_2\left(\frac{a_1 z + b_1}{c_1 z + d_1}\right) + d_2},$$

joten

$$\gamma_2\gamma_1(z) = \frac{(a_2 a_1 + b_2 c_1)z + (a_2 b_1 + b_2 d_1)}{(c_2 a_1 + d_2 c_1)z + (c_2 b_1 + d_2 d_1)}.$$

Vertaa kuvauksen $\gamma_2 \circ \gamma_1$ kertoimia matriisituloon

$$\begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 a_1 + b_2 c_1 & a_2 b_1 + b_2 d_1 \\ c_2 a_1 + d_2 c_1 & c_2 b_1 + d_2 d_1 \end{pmatrix}.$$

Kun Möbius-kuvausten γ_1 ja γ_2 kertoimista muodostetaan 2×2-matriisit, ovat yhdistetyn kuvauksen $\gamma_2\gamma_1$ kertoimet näiden matriisien tulon matriisialkiot. Seuraavaksi pohdimme Möbius-kuvausten ja matriisien välistä yhteyttä.

Huomaa, että jos

$$\gamma(z) = \frac{az+b}{cz+d}$$

on ylemmän puolitason Möbius-kuvaus ja $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, niin tällöin kuvaus γ voidaan myös kirjoittaa muodossa

$$z \mapsto \frac{\lambda az + \lambda b}{\lambda cz + \lambda d}.$$

Niinpä valitsemalla $\lambda = 1/\sqrt{(ad-bc)}$ voimme aina olettaa, että $ad - bc = 1$.

Määritelmä 9.5. Möbius-kuvauksen $\gamma(z) = (az+b)/(cz+d)$ sanotaan olevan *normalisoidussa muodossa* tai *normalisoitu*, jos $ad - bc = 1$.

Harjoitustehtävä 9.6. *Normalisoi tehtävän 9.4 Möbius-kuvaukset.*

Määritelmä 9.7. Tason $\mathbb{R}^2$ *erityinen lineaarinen ryhmä* on

$$\mathrm{SL}(2,\mathbb{R}) = \left\{ A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a,b,c,d \in \mathbb{R},\ \det A = ad - bc = 1 \right\}.$$

Harjoitustehtävä 9.8.

(1) *Osoita, että* $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ *on ryhmä (laskutoimituksena matriisien kertolasku).*

(2) *Olkoon*

$$\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z}) = \left\{ A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a,b,c,d \in \mathbb{Z},\ \det A = ad - bc = 1 \right\}.$$

Osoita, että $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ *on ryhmän* $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ *aliryhmä.*

Jokaista erityisen lineaarisen ryhmän matriisia

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

vastaa normalisoitu Möbius-kuvaus $\gamma_A \in \mathrm{M\ddot{o}b}(\mathbb{H})$, missä

$$\gamma_A(z) = \frac{az+b}{cz+d}.$$

Huomaa, että matriisit

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ ja } -A = \begin{pmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{pmatrix},$$

missä $ad - bc = 1$, ovat molemmat ryhmän $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ alkioita, ja että niitä vastaa sama Möbius-kuvaus $\gamma_A = \gamma_{-A}$. Toisaalta $\gamma_B \neq \gamma_A$ kaikilla $B \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$, $B \neq A$, $B \neq -A$.

Huomautus 9.9. Olkoon

$$Z = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Tällöin Z on ryhmän $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ normaali aliryhmä, joten voimme muodostaa *tekijäryhmän*

$$\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R}) = \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})/Z.$$

Ryhmästä $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ käytetään nimitystä *projektiivinen erityinen lineaarinen ryhmä*. Edellä todetun perusteella voimme halutessamme samastaa ryhmän $\mathrm{Möb}(\mathbb{H})$ ryhmän $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ kanssa.

10. Möbius-kuvausten luokittelu: paraboliset kuvaukset

Konjugaatit

Määritelmä 10.1. Olkoot $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathrm{Möb}(\mathbb{H})$ kaksi ylemmän puolitason Möbius-kuvausta. Sanomme, että kuvaus γ_2 on kuvauksen γ_1 *konjugaatti*, jos on olemassa sellainen Möbius-kuvaus $g \in \mathrm{Möb}(\mathbb{H})$, että $\gamma_1 = g^{-1} \circ \gamma_2 \circ g$.

Harjoitustehtävä 10.2.

(1) *Määritellään relaatio $\sim$ ryhmässä* $\mathrm{Möb}(\mathbb{H})$ *asettamalla $\gamma_1 \sim \gamma_2$, jos ja vain jos γ_2 on kuvauksen γ_1 konjugaatti. Osoita, että $\sim$ on ekvivalenssirelaatio.*

(2) *Oletetaan, että Möbius-kuvaukset γ_1 ja γ_2 ovat toistensa konjugaatteja. Osoita, että jos γ_1 on hyperbolinen (vast. elliptinen, parabolinen), niin tällöin myös γ_2 on hyperbolinen (vast. elliptinen, parabolinen).*

Möbius-kuvauksen jälki

Palautetaan mieliin, että matriisin A *jäljellä* $\mathrm{tr}(A)$ tarkoitetaan sen lävistäjäalkioitten summaa. Jos A on 2×2-matriisi,

$$A = (a,b;c,d) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

niin $\mathrm{tr}(A) = a+d$.

Olkoon $\gamma(z) = (az+b)/(cz+d)$, $ad-bc>0$, ylemmän puolitason Möbius-kuvaus. Jakamalla kertoimet a,b,c,d termillä $\sqrt{ad-bc}$, voimme kirjoittaa kuvauksen γ normalisoidussa muodossa. Oletetaan siis, että γ on kirjoitettu normalisoidussa muodossa. Tällöin kuvausta γ vastaa matriisi $A = (a,b;c,d)$, missä $ad-bc=1$. Niinpä $A \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$. Kuten aiemmin totesimme, tämä matriisi ei ole yksikäsitteinen, kuvausta γ vastaa myös matriisi $-A = (-a,-b;,-c,-d)$. Määrittelemme kuvauksen

$$\tau\colon \mathrm{Möb}(\mathbb{H}) \to \mathbb{R}, \ \ \tau(\gamma) = (\mathrm{tr}(A))^2 = (\mathrm{tr}(-A))^2.$$

Määritelmä 10.3. Olkoon $\gamma \in \mathrm{Möb}(\mathbb{H})$ Möbius-kuvaus, jolle $\gamma(z) = (az+b)/(cz+d)$, missä $ad-bc=1$. Kuvauksen γ *jälki* on

$$\mathrm{tr}(\gamma) = (a+d)^2.$$

Seuraavan lauseen perusteella Möbius-kuvauksilla on sama jälki, jos ne ovat toistensa konjugaatteja:

Lause 10.4. *Olkoot $\gamma_1, \gamma_2 \in$* $\mathrm{Möb}(\mathbb{H})$ *Möbius-kuvauksia. Jos γ_1 ja γ_2 ovat toistensa konjugaatteja, niin* $\mathrm{tr}(\gamma_1) = \mathrm{tr}(\gamma_2)$.

Harjoitustehtävä 10.5. *Todista Lause 10.4. (Vihje:* $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$ *kaikille* $n \times n$*-matriiseille* A *ja* B*.)*

Seuraavaksi luokittelemme Möbius-kuvaukset käyttämällä apuna kuvausten jälkeä. Olkoon $\gamma(z) = (az+b)/(cz+d)$ ylemmän puolitason Möbius-kuvaus. Oletetaan ensin yksinkertaisuden vuoksi, että ∞ ei ole kuvauksen γ kiintopiste. Tällöin $c \neq 0$. Aiemmin huomattiin, että z_0 on kuvauksen γ kiintopiste, jos ja vain jos

$$z_0 = \frac{a-d \pm \sqrt{(a-d)^2+4bc}}{2c}.$$

Neliöjuuren sisällä olevasta termistä riippuu, onko yhtälöllä yksi tai kaksi reaalista ratkaisua vaiko kaksi kompleksista ratkaisua, joista kuitenkin ainoastaan toinen voi olla ylemmässä puolitasossa. Soveltamalla yhtälöitä

$$ad - bc = 1 \text{ ja } (a+d)^2 = \mathrm{tr}(\gamma)$$

saadaan

$$(a-d)^2 + 4bc = \mathrm{tr}(\gamma) - 4.$$

Jos $c = 0$, on ∞ kuvauksen γ kiintopiste. Toinen kiintopiste on tällöin $b/(d-a)$. Niinpä ∞ on ainoa kiintopiste, jos $a = d$, missä tapauksessa täytyy olla $a = d = 1$ tai $a = d = -1$, koska $ad - bc = ad = 1$. Jos $a = d$, on

$$\mathrm{tr}(\gamma) = (1+1)^2 = 4.$$

Jos $a \neq d$, on kuvauksella γ kaksi kiintopistettä reunalla $\partial\mathbb{H}$, jolloin $\mathrm{tr}(\gamma) > 4$. Olemme todistaneet seuraavan tuloksen:

Lause 10.6. *Olkoon* $\gamma \in \mathrm{M\ddot{o}b}(\mathbb{H})$*. Oletetaan, että* γ *ei ole identtinen kuvaus. Tällöin*

(1) *kuvaus* γ *on parabolinen, jos ja vain jos* $\mathrm{tr}(\gamma) = 4$*,*
(2) *kuvaus* γ *on elliptinen, jos ja vain jos* $\mathrm{tr}(\gamma) \in [0,4)$*,*
(3) *kuvaus* γ *on hyperbolinen, jos ja vain jos* $\mathrm{tr}(\gamma) \in (4,\infty)$*.*

Paraboliset kuvaukset

Ylemmän puolitason Möbius-kuvausta γ sanotaan paraboliseksi, jos sillä on täsmälleen yksi kiintopiste ja tämä kiintopiste on reunalla $\partial\mathbb{H}$. Esimerkiksi Möbius-kuvaus

$$\gamma\colon \mathbb{H} \to \mathbb{H}, \quad z \mapsto z+1,$$

on parabolinen. Tämän kuvauksen ainoa kiintopiste on ∞. Muotoa

$$z \mapsto z + b$$

olevaa Möbius-kuvausta kutsutaan *siirroksi.*

Harjoitustehtävä 10.7. *Olkoon* $\gamma(z) = z+b$*,* $b \in \mathbb{R}$*. Osoita, että* γ *on kuvauksen* $\gamma_1(z) = z+1$ *konjugaatti, jos* $b > 0$*, ja kuvauksen* $\gamma_2(z) = z-1$ *konjugaatti, jos* $b < 0$*. Ovatko kuvaukset* γ_1 *ja* γ_2 *konjugaatteja?*

Lause 10.8. *Olkoon* $\gamma \in \mathrm{M\ddot{o}b}(\mathbb{H})$*. Oletetaan, että* γ *ei ole identtinen kuvaus. Tällöin seuraavat ehdot ovat yhtäpitäviä:*

(1) γ *on parabolinen,*
(2) $\mathrm{tr}(\gamma) = 4$,
(3) γ *on siirtokuvauksen konjugaatti,*
(4) γ *on joko kuvauksen* $z \mapsto z + 1$ *tai kuvauksen* $z \mapsto z - 1$ *konjugaatti.*

Todistus. Lauseen 10.6 perusteella kohdat (1) ja (2) ovat yhtäpitäviä. On selvää, että kohta (3) seuraa kohdasta (4). Harjoitustehtävän 10.7 perusteella kohta (4) seuraa kohdasta (3).

Oletetaan sitten, että ehto (4) on voimassa. Möbius-kuvauksen $z \mapsto z+1$ ainoa kiintopiste on ∞. Niinpä kuvauksella γ on myös täsmälleen yksi kiintopiste ja se on reunalla $\partial\mathbb{H}$, jos γ on kuvauksen $z \mapsto z + 1$ konjugaatti. Tästä seuraa, että γ on parabolinen. Samoin nähdään, että γ on parabolinen, jos se on kuvauksen $z \mapsto z - 1$ konjugaatti.

Osoitamme vielä, että ehto (3) seuraa ehdosta (1). Oletetaan, että γ on parabolinen, joten sillä on yksikäsitteinen kiintopiste ξ reunalla $\partial\mathbb{H}$. Olkoon g Möbius-kuvaus, joka kuvaa pisteen ξ pisteelle ∞. Tällöin $g\gamma g^{-1}$ on Möbius-kuvaus, jonka ainoa kiintopiste on ∞. Osoitamme, että $g\gamma g^{-1}$ on siirto. Kirjoitetaan

$$g\gamma g^{-1}(z) = \frac{az + b}{cz + d}.$$

Koska ∞ on kuvauksen $g\gamma g^{-1}$ kiintopiste, on $c = 0$. Niinpä

$$g\gamma g^{-1}(z) = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d},$$

joten kuvauksella $g\gamma g^{-1}$ on kiintopiste $b/(d - a)$. Koska kuvauksen $g\gamma g^{-1}$ ainoa kiintopiste on ∞, seuraa tästä että $d = a$. Niinpä $g\gamma g^{-1}(z) = z + b'$ jollain $b' \in \mathbb{R}$. Tällöin γ on siirtokuvauksen konjugaatti. □

11. Möbius-kuvausten luokittelu: hyperboliset ja elliptiset kuvaukset

Edellisessä luvussa löysimme ehtoja, jotka ovat yhtäpitäviä sille, että annettu Möbius-kuvaus on parabolinen. Erityisesti todistimme, että kaikki paraboliset Möbius-kuvaukset ovat siirtokuvausten konjugaatteja. Tässä luvussa todistamme samantapaisia ehtoja hyperbolisille ja elliptisille Möbius-kuvauksille.

Hyperboliset Möbius-kuvaukset

Möbius-kuvausta sanotaan hyperboliseksi, jos sillä on täsmälleen kaksi kiintopistettä ja ne molemmat sijaitsevat reunalla $\partial\mathbb{H}$. Olkoon $k > 0$ ja oletetaan, että $k \neq 1$. Tällöin Möbius-kuvaus $\gamma(z) = kz$ on hyperbolinen. Kuvauksen γ kiintopisteet ovat 0 ja ∞. Muotoa $z \mapsto kz$, missä $k \neq 1$, olevaa Möbius-kuvausta kutsutaan *venytykseksi.*

Harjoitustehtävä 11.1. *Osoita, että Möbius-kuvaukset* $z \mapsto k_1 z$ *ja* $z \mapsto k_2 z$, *missä* $k_1, k_2 > 0$, $k_1 \neq 1$, $k_2 \neq 1$, *ovat konjugaatteja, jos ja vain jos* $k_1 = k_2$ *tai* $k_1 = 1/k_2$.

Lause 11.2. *Olkoon* $\gamma \in \mathrm{Möb}(\mathbb{H})$. *Tällöin seuraavat ehdot ovat yhtäpitäviä:*

(1) *kuvaus* γ *on hyperbolinen,*
(2) $\mathrm{tr}(\gamma) > 4$*,*
(3) *kuvaus* γ *on venytyskuvauksen konjugaatti, eli* γ *on kuvauksen* $z \mapsto kz$ *konjugatti jollain* $k > 0$*,* $k \neq 1$*.*

Todistus. Lauseen 10.6 perusteella kohdat (1) ja (2) ovat yhtäpitäviä.

Oletetaan sitten, että ehto (3) on voimassa. Tällöin γ on jonkin venytyskuvauksen konjugaatti. Venytyskuvauksella on täsmälleen kaksi kiintopistettä, 0 ja ∞. Tällöin myös kuvauksella γ on täsmälleen kaksi kiintopistettä, jotka molemmat ovat reunalla $\partial\mathbb{H}$. Niinpä γ on hyperbolinen kuvaus.

Osoitamme vielä, että ehto (3) seuraa ehdosta (1). Ensin osoitamme, että jos sekä 0 että ∞ ovat kuvauksen γ kiintopisteitä, niin γ on venytys: Kirjoitetaan

$$\gamma(z) = \frac{az+b}{cz+d},$$

missä $ad - bc > 0$. Koska ∞ on kuvauksen γ kiintopiste, on $c = 0$. Niinpä $\gamma(z) = (az+b)/d$. Koska myös 0 on kuvauksen γ kiintopiste, on myös $b = 0$. Niinpä $\gamma(z) = (a/d)z$, joten γ on venytys.

Oletetaan sitten, että γ on hyperbolinen Möbius-kuvaus. Tällöin kuvauksella γ on kaksi kiintopistettä $\xi_1, \xi_2 \in \partial\mathbb{H}$. Oletetaan ensin, että $\xi_1 = \infty$ ja $\xi_2 \in \mathbb{R}$. Olkoon $g(z) = z - \xi_2$. Tällöin Möbius-kuvaus $g\gamma g^{-1}$ on kuvauksen γ konjugaatti ja sen kiintopisteet ovat 0 ja ∞. Edellisen huomautuksen perusteella γ on venytys.

Oletetaan seuraavaksi, että $\xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}$. Voimme olettaa, että $\xi_1 < \xi_2$. Olkoon g Möbius-kuvaus

$$g(z) = \frac{z-\xi_2}{z-\xi_1}.$$

Koska $g(\xi_1) = \infty$ ja $g(\xi_2) = 0$, ovat 0 ja ∞ kuvauksen $g\gamma g^{-1}$ kiintopisteet. Niinpä $g\gamma g^{-1}$ on venytys, joten γ on venytyskuvauksen konjugaatti. □

Elliptiset Möbius-kuvaukset

Elliptisten Möbius-kuvausten ymmärtäminen on helpompaa, jos ylemmän puolitason $\mathbb{H}$ Möbius-kuvausten sijaan tutkimme Poincarén kiekon $\mathbb{D}$ Möbius-kuvauksia. Palautetaan mieliin, että Poincarén kiekon Möbius-kuvaukset ovat muotoa

$$\gamma(z) = \frac{\alpha z+\beta}{\overline{\beta} z+\overline{\alpha}}, \tag{22}$$

missä $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ ja $|\alpha|^2 - |\beta|^2 > 0$. Kun normalisoimme kuvauksen γ, voimme olettaa, että $|\alpha|^2 - |\beta|^2 = 1$. Poincarén kiekon Möbius-kuvaukset luokitellaan seuraavasti:

(1) kuvaus γ on hyperbolinen, jos sillä on kaksi kiintopistettä reunalla $\partial\mathbb{D}$ eikä yhtään kiintopistettä kiekolla $\mathbb{D}$,
(2) kuvaus γ on parabolinen, jos sillä on yksi kiintopiste reunalla $\partial\mathbb{D}$ eikä yhtään kiintopistettä kiekolla $\mathbb{D}$,
(3) kuvaus γ on elliptinen, jos sillä ei ole yhtään kiintopistettä reunalla $\partial\mathbb{D}$ ja yksi kiintopiste kiekolla $\mathbb{D}$.

Myös Poincarén kiekon Möbius-kuvaukset voidaan luokitella käyttämällä apuna kuvausten jälkeä. Olkoon γ Poincarén kiekon Möbius-kuvaus normalisoidussa muodossa (22). Määrittelemme kuvauksen γ jäljen $\operatorname{tr}(\gamma)$ asettamalla $\operatorname{tr}(\gamma) = (\alpha + \overline{\alpha})^2$. Voidaan osoittaa, että

(1) kuvaus γ on hyperbolinen, jos ja vain jos $\operatorname{tr}(\gamma) > 4$,
(2) kuvaus γ on parabolinen, jos ja vain jos $\operatorname{tr}(\gamma) = 4$,
(3) kuvaus γ on elliptinen, jos ja vain jos $\operatorname{tr}(\gamma) \in [0, 4)$.

Yllä olevat yhtäläisyydet voidaan todistaa eri tavoin. Ensinnäkin voisimme ratkaista toisen asteen yhtälön $\gamma(z_0) = z_0$ ja tutkia diskriminantin etumerkkiä. Vaihtoehtoisesti voisimme käyttää kuvausta $h \colon \mathbb{H} \to \mathbb{D}$, $h(z) = (z - i)/(iz - 1)$ seuraavalla tavalla: Poincarén kiekon $\mathbb{D}$ Möbius-kuvaukset ovat muotoa $h\gamma h^{-1}$, missä γ on ylemmän puolitason $\mathbb{H}$ Möbius-kuvaus. Voidaan näyttää, että γ on hyperbolinen (vast. parabolinen, elliptinen), jos ja vain jos $h\gamma h^{-1}$ on hyperbolinen (vast. parabolinen, elliptinen). Edelleen, $\operatorname{tr}(\gamma) = \operatorname{tr}(h\gamma h^{-1})$.

Olkoon γ Poincarén kiekon elliptinen Möbius-kuvaus. Tällöin kuvauksella γ on täsmälleen yksi kiintopiste ja se on kiekolla $\mathbb{D}$.

Olkoon $\theta \in (0, 2\pi)$ ja olkoon

$$\gamma \colon \mathbb{D} \to \mathbb{D}, \quad z \mapsto e^{i\theta} z.$$

Tällöin $\gamma \in \text{Möb}(\mathbb{D})$ (valitse $\alpha = e^{i\theta/2}$ ja $\beta = 0$ yhtälössä 22). Kuvaus γ kiertää Poincarén kiekon $\mathbb{D}$ kulman θ verran origon ympäri.

Lause 11.3. *Olkoon $\gamma \in \text{Möb}(\mathbb{D})$. Seuraavat ehdot ovat yhtäpitäviä:*

(1) *kuvaus γ on elliptinen,*
(2) *kuvauksen γ jälki $\operatorname{tr}(\gamma) \in [0, 4)$,*
(3) *kuvaus γ on kierron $z \mapsto e^{i\theta} z$ konjugaatti.*

Todistus. Lauseen 10.6 ja edellä olevan keskustelun perusteella kohdat (1) ja (2) ovat yhtäpitävät.

Oletetaan, että ehto (3) on voimassa. Jokaisen kierron ainoa kiintopiste kiekolla $\mathbb{D}$ on origo. Niinpä kuvauksella γ on täsmälleen yksi kiintopiste, joka sijaitsee kiekolla $\mathbb{D}$, koska γ on kierron konjugaatti. Tästä seuraa, että γ on elliptinen kuvaus.

Osoitamme vielä, että kolmas ehto seuraa ensimmäisestä. Oletetaan, että γ on elliptinen kuvaus, ja että sen yksikäsitteinen kiintopiste on $\xi \in \mathbb{D}$. Olkoon g kiekon $\mathbb{D}$ Möbius-kuvaus, jolle $g(\xi) = 0$. Tällöin $g\gamma g^{-1}$ on myös kiekon $\mathbb{D}$ Möbius-kuvaus, ja $g\gamma g^{-1}$ on kuvauksen γ konjugaatti. Edelleen 0 on kuvauksen $g\gamma g^{-1}$ ainoa kiintopiste. Kirjoitetaan

$$g\gamma g^{-1}(z) = \frac{\alpha z + \beta}{\overline{\beta} z + \overline{\alpha}},$$

missä $|\alpha|^2 - |\beta|^2 > 0$. Koska 0 on kuvauksen $g\gamma g^{-1}$ kiintopiste, on $\beta = 0$. Kirjoitetaan α napakoordinaateissa, jolloin $\alpha = re^{i\theta}$, $r > 0$. Tällöin

$$g\gamma g^{-1}(z) = \frac{\alpha}{\overline{\alpha}} z = \frac{re^{i\theta}}{re^{-i\theta}} z = e^{2i\theta} z,$$

joten γ on kierron konjugaatti. $\square$

Huomautus 11.4. Olkoon $\gamma(z) = e^{i\theta}z \in \mathrm{Möb}(\mathbb{D})$ Poincarén kiekon kierto. Olkoon $h\colon \mathbb{H} \to \mathbb{D}$, $h(z) = (z-i)/(iz-1)$. Tällöin $h^{-1}\gamma h \in \mathrm{Möb}(\mathbb{H})$ on muotoa

$$h^{-1}\gamma h(z) = \frac{\cos(\theta/2)z + \sin(\theta/2)}{-\sin(\theta/2)z + \cos(\theta/2)}. \tag{23}$$

Kuvauksella $h^{-1}\gamma h$ on täsmälleen yksi kiintopiste i. Muotoa 23 olevia kuvauksia kutsutaan usein *ylemmän puolitason kierroiksi.*

12. Topologisista ryhmistä

Tässä luvussa tutustutaan topologisiin ryhmiin. Jäljellä olevat luvut voi ymmärtää vaikka jättäisi tämän luvun lukematta.

Määritelmä 12.1. Topologinen ryhmä on ryhmä G, joka on myös topologinen avaruus ja jolle pätee:

(1) yhden pisteen joukot ovat suljettuja,
(2) kuvaus $\mu\colon G \times G \to G$, $(x,y) \mapsto xy$, on jatkuva kun ryhmässä $G \times G$ on tulotopologia,
(3) kuvaus $i\colon G \to G$, $x \mapsto x^{-1}$, on jatkuva.

Esimerkki 12.2.

(1) Mikä tahansa ryhmä diskreetillä topologialla (ks. seuraava luku) varustettuna on topologinen ryhmä.
(2) Reaalilukujen ryhmä ja kokonaislukujen ryhmä (kummassakin laskutoimituksena yhteenasku) ovat topologisia ryhmiä.
(3) Yksikköympyrä $S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ kompleksilukujen kertolaskulla varustettuna on topologinen ryhmä.

Lemma 12.3. *Topologiset ryhmät ovat Hausdorffin avaruuksia.*

Todistus. Topologinen avaruus X on Hausdorffin avaruus, jos ja vain jos sen lävistäjä

$$\Delta(X) = \{(x,x) \mid x \in X\}$$

on suljettu tuloavaruudessa $X \times X$. Olkoon G topologinen ryhmä. Kuvaus

$$f\colon G \times G \to G, \ \ (g,h) \mapsto gh^{-1},$$

on jatkuva. Olkoon e ryhmän G neutraalialkio. Koska $\{e\}$ on ryhmän G suljettu osajoukko, on

$$\Delta(G) = \{(g,g) \mid g \in G\} = f^{-1}(e)$$

suljettu ryhmässä $G \times G$. Siis G on Hausdorffin avaruus. $\square$

Lause 12.4. *Olkoon G topologinen ryhmä ja olkoon H ryhmän G diskreetti aliryhmä. Tällöin H on suljettu ryhmässä G.*

Todistus. Tehdään vastaoletus ja oletetaan, että on olemassa $p \in G \setminus H$, jonka jokainen ympäristö sisältää äärettömän monta ryhmän H alkiota. Koska H on diskreetti, on olemassa ryhmän G avoin osajoukko U, jolle $U \cap H = \{e\}$. Koska G on topologinen ryhmä, neutraalialkiolla e on sellainen ympäristö V, että $VV^{-1} \subset$

U (tarkista!). Tällöin $pV = p(V)$ on pisteen p ympäristö, joten on olemassa $h_1, h_2 \in H \cap pV$, $h_1 \neq h_2$. Tällöin

$$e \neq h_1^{-1}h_2 \in (pV)^{-1}pV = V^{-1}p^{-1}pV = VV^{-1} \subset U,$$

eli päädymme ristiriitaan. Niinpä vastaoletus on väärä ja H on suljettu. □

Olkoon G topologinen ryhmä ja olkoon $h \in G$. Olkoon $c_h \colon G \to G$, $g \mapsto h$, vakiokuvaus. Tällöin kuvaukset

$$L_h = \mu \circ (c_h, \mathrm{id}) \colon G \to G, \;\; g \mapsto hg,$$

ja

$$R_h = \mu \circ (\mathrm{id}, c_h) \colon G \to G, \;\; g \mapsto gh,$$

ovat jatkuvien kuvausten yhdisteinä jatkuvia. Itse asiassa ne ovat homeomorfismeja, koska myös niiden käänteiskuvaukset $L_{h^{-1}}$ ja $R_{h^{-1}}$ ovat jatkuvia. Jos siis U on ryhmän G avoin (vast. suljettu) osajoukko, niin myös joukot

$$hU = h(U) = L_h(U) \text{ ja } Uh = R_h(U)$$

ovat ryhmän G avoimia (vast. suljettuja) osajoukkoja.

Olkoon H topologisen ryhmän G suljettu, normaali aliryhmä. Tällöin G/H on ryhmä. Olkoon

$$p \colon G \to G/H, \;\; g \mapsto gH.$$

Tällöin p on surjektio. Määritellään ryhmään G/H topologia seuraavasti: joukko U on avoin ryhmässä G/H, jos ja vain jos sen alkukuva $p^{-1}(U)$ on avoin ryhmässä G. On helppo tarkistaa, että tällä tavoin saadaan topologia. Näin saatua ryhmän G/H topologiaa sanotaan *tekijätopologiaksi* ja kuvausta p sanotaan *tekijäkuvaukseksi*. Selvästi p on jatkuva kuvaus.

Lemma 12.5. *Kuvaus $p \colon G \to G/H$ on avoin kuvaus (eli $p(V)$ on avoin ryhmässä G/H aina kun V on ryhmän G avoin osajoukko).*

Todistus. Olkoon U ryhmän G avoin osajoukko. Olkoon $h \in H$. Tällöin Uh on ryhmän G avoin osajoukko. Niinpä

$$p^{-1}(p(U)) = \bigcup_{h \in H} Uh$$

on avoimien joukkojen yhdisteenä ryhmän G avoin osajoukko. Siis $p(U)$ on ryhmän G/H avoin osajoukko. □

Lause 12.6. *Olkoon G topologinen ryhmä ja olkoon H ryhmän G suljettu, normaali aliryhmä. Tällöin G/H on topologinen ryhmä.*

Todistus. Lisätään myöhemmin. Ks. algebrallisen topologian (syksy 2015) 6. harjoitukset. □

Olkoon $M_n(\mathbb{R})$ kaikkien reaalisten $n \times n$-matriisien joukko. Joukolle $M_n(\mathbb{R})$ saadaan topologia kun samastetaan se euklidisen avaruuden $\mathbb{R}^{n^2}$ kanssa. Olkoon

$$\det \colon M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}, \;\; A \mapsto \det(A),$$

kuvaus, joka kuvaa matriisin sen determinantille. Tällöin det on jatkuva kuvaus. Kääntyvät $n \times n$-matriisit muodostavat ryhmän $\mathrm{GL}(n;\mathbb{R})$. Koska $\mathrm{GL}(n;\mathbb{R}) = \det^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\})$, nähdään, että $\mathrm{GL}(n;\mathbb{R})$ on avoin joukossa $M_n(\mathbb{R})$. Itse asiassa $\mathrm{GL}(n;\mathbb{R})$ on topologinen ryhmä (ks. algebrallinen topologia, syksy 2015, 6. harjoitus).

Erityinen lineaarinen ryhmä $\mathrm{SL}(n;\mathbb{R}) = \det^{-1}(1)$ on ryhmän $\mathrm{GL}(n;\mathbb{R})$ suljettu aliryhmä, joten se on topologinen ryhmä. Erityisesti $\mathrm{SL}(2;\mathbb{R})$ on topologinen ryhmä ja

$$Z = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

on ryhmän $\mathrm{SL}(2;\mathbb{R})$ suljettu, normaali aliryhmä. Lauseen 12.6 perusteella

$$\mathrm{PSL}(2;\mathbb{R}) = \mathrm{SL}(2;\mathbb{R})/Z$$

tekijätopologialla varustettuna on topologinen ryhmä.

Aiemmin todistettiin että on olemassa ryhmäisomorfismit

$$\mathrm{Möb}(\mathbb{H}) \to \mathrm{PSL}(2;\mathbb{R})$$

ja

$$\mathrm{Möb}(\mathbb{D}) \to \mathrm{Möb}(\mathbb{H}).$$

Ryhmille $\mathrm{Möb}(\mathbb{H})$ ja $\mathrm{Möb}(\mathbb{D})$ saadaan topologiat, joilla varustettuina ne ovat topologisia ryhmiä, kun vaaditaan, että yllä olevat isomorfismit ovat homeomorfismeja.

Seuraavassa luvussa topologisoimme ryhmät $\mathrm{Möb}(\mathbb{H})$ ja $\mathrm{Möb}(\mathbb{D})$ määrittelemällä niille metriikat ja metriset topologiat. Näin saatavat metriset topologiat ovat samoja kuin tässä luvussa määritellyt topologiat. Siis ryhmälle $\mathrm{Möb}(\mathbb{H})$ (vast. ryhmälle $\mathrm{Möb}(\mathbb{D})$) saadaan samat avoimet joukot, topologisoidaan se sitten kummalla tahansa tavalla.

13. Fuchsin ryhmät

Tässä luvussa aloitamme tutustumisen ryhmien $\mathrm{Möb}(\mathbb{H})$ ja $\mathrm{Möb}(\mathbb{D})$ tiettyihin tärkeisiin aliryhmiin.

Määritelmä 13.1. Ryhmien $\mathrm{Möb}(\mathbb{H})$ ja $\mathrm{Möb}(\mathbb{D})$ diskreeteistä aliryhmistä käytetään nimitystä *Fuchsin ryhmä.*

Diskreetit joukot

Diskreetin joukon käsite on olennainen niin topologiassa kuin geometriassakin.

Määritelmä 13.2. Olkoon (X, d) metrinen avaruus ja olkoon $Y \subset X$. Olkoon $y \in Y$. Jos on olemassa sellainen $\delta > 0$, että kaikilla $y' \in Y$, $y' \neq y$, pätee $d(y, y') > \delta$, kutsumme pistettä y joukon Y *eristetyksi pisteeksi* eli *erakkopisteeksi.*

Määritelmä 13.3. Olkoon (X, d) metrinen avaruus ja olkoon $Y \subset X$. Jos kaikki joukon Y pisteet ovat eristettyjä, sanomme, että Y on joukon X *diskreetti osajoukko.*

Esimerkki 13.4.

(1) Jokaisessa metrisessä avaruudessa yhden pisteen joukot $\{x\}$ ovat diskreettejä.
(2) Kokonaislukujen joukko $\mathbb{Z}$ on reaalilukujen joukon (euklidisella metriikalla varustettuna) $\mathbb{R}$ diskreetti osajoukko: Olkoon $n \in \mathbb{Z}$. Olkoon $\delta = 1/2$. Jos nyt $m \in \mathbb{Z}$ ja $d(m,n) = |m-n| \leq 1/2$, täytyy olla $m = n$.
(3) Rationaalilukujen joukko $\mathbb{Q}$ ei ole reaalilukujen joukon diskreetti osajoukko: Mielivaltaisen lähellä mitä tahansa rationaalilukua on äärettömän monta eri rationaalilukua.
(4) Joukko $Y_1 = \{1/n \mid n \in \mathbb{N}\}$ on reaalilukujen joukon diskreetti osajoukko. Tämä nähdään seuraavasti: Olkoon $y = 1/n \in Y_1$. Olkoon $\delta = 1/n(n+1)$. Jos nyt $y' \in Y_1$ ja $|y - y'| < \delta$, niin täytyy olla $y = y'$.
(5) Joukko $Y_2 = \{1/n \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$ ei ole reaalilukujen diskereetti osajoukko, koska 0 ei ole joukon Y_2 eristetty piste: Olkoon $\delta > 0$ miten pieni tahansa, aina on olemassa $y \in Y_2$, $y \neq 0$, jolle $|y - 0| < \delta$.

Meitä kiinnostavat ryhmän $\text{Möb}(\mathbb{H})$ diskreetit aliryhmät eli ryhmän $\text{Möb}(\mathbb{H})$ aliryhmät, jotka ovat ryhmän $\text{Möb}(\mathbb{H})$ diskreettejä osajoukkoja. Niinpä seuraavaksi määrittelemme metriikan ryhmässä $\text{Möb}(\mathbb{H})$.

Intuitiivisesti ajatellen kaksi Möbius-kuvausta on lähellä toisiaan, jos niiden kertoimet ovat lähellä toisiaan. Ongelmallista on, että eri kertoimet $(a, b; c, d)$ voivat määritellä saman Möbius-kuvauksen. Välttääksemme tämän ongelman kirjoitamme kaikki Möbius-kuvaukset normalisoidussa muodossa; Möbius-kuvaus $\gamma(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ on *normalisoitu*, jos $ad - bc = 1$. Kuten aiemmin todettiin, jos kuvaus

$$\gamma(z) = \frac{az+b}{cz+d}$$

on normalisoitu, niin tällöin myös

$$\gamma(z) = \frac{-az-b}{-cz-d}$$

on normalisoitu. Muita tapoja kirjoittaa γ normalisoidussa muodossa ei ole.

Olkoot

$$\gamma_1(z) = \frac{a_1 z + b_1}{c_1 z + d_1} \quad \text{ja} \quad \gamma_2(z) = \frac{a_2 z + b_2}{c_2 z + d_2}$$

normalisoituja ylemmän puolitason Möbius-kuvauksia. Kuvausten γ_1 ja γ_2 välinen etäisyys on

$$\begin{aligned} d_{\text{Möb}}(\gamma_1, \gamma_2) &= \min\{\|(a_1, b_1, c_1, d_1) - (a_2, b_2, c_2, d_2)\|, \\ &\qquad \|(a_1, b_1, c_1, d_1) - (-a_2, -b_2, -c_2, -d_2)\|\}. \end{aligned}$$

Samalla tavoin voidaan määritellä metriikka ryhmään $\text{Möb}(\mathbb{D})$.

Fuchsin ryhmät

Määritelmän mukaan Fuchsin ryhmiä ovat ryhmien $\text{Möb}(\mathbb{H})$ ja $\text{Möb}(\mathbb{D})$ diskreetit aliryhmät.

Esimerkki 13.5.

(1) Metristen avaruuksien äärelliset osajoukot ovat diskreettejä. Niinpä ryhmien Möb($\mathbb{H}$) ja Möb($\mathbb{D}$) kaikki äärelliset aliryhmät ovat diskreettejä.
(2) Esimerkki ryhmän Möb($\mathbb{H}$) äärellisestä aliryhmästä: Olkoon

$$\gamma_\theta(z) = \frac{\cos(\theta/2)z + \sin(\theta/2)}{-\sin(\theta/2)z + \cos(\theta/2)}$$

kierto pisteen i ympäri. Olkoon $q \in \mathbb{N}$. Tällöin $\{\gamma_{2\pi j/g} |) \leq j \leq q-1\}$ on ryhmän Möb($\mathbb{H}$) äärellinen aliryhmä. Poincarén kiekolla tämä aliryhmä vastaa kiertojen muodostamaa aliryhmää

$$\{z \mapsto e^{2\pi j/q} z \mid j = 0, \dots, q-1\}.$$

(Kuvaus $z \mapsto e^{2\pi j/q} z$ on kierto origon ympäri kulman $2\pi/q$ verran.)
(3) Kokonaislukusiirrot muodostavat Fuchsin ryhmän $\{\gamma_n(z) = z+n \mid n \in \mathbb{Z}\}$. Kaikkien siirtojen muodostama ryhmä $\{\gamma_b(z) = z + b \mid b \in \mathbb{R}\}$ ei ole Fuchsin ryhmä, koska se ei ole diskreetti.
(4) Ryhmän Möb($\mathbb{H}$) aliryhmä

$$\Gamma = \{\gamma_n(z) = 2^n z \mid n \in \mathbb{Z}\}$$

on Fuchsin ryhmä.
(5) Jos Γ_1 on Fuchsin ryhmä ja Γ_2 on ryhmän Γ_1 aliryhmä, niin myös Γ_2 on Fuchsin ryhmä.
(6) Ylemmän puolitason muotoa

$$\gamma(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{Z}, \quad ad - bc = 1,$$

ovat Möbius-kuvaukset muodostavat *modulaariryhmän* PSL$(2, \mathbb{Z})$, joka on Fuchsin ryhmä.
(7) Olkoon $q \in \mathbb{N}$. Määritellään

$$\Gamma_q = \left\{\gamma(z) = \frac{az+b}{cz+d} \mid a, b, c, d \in \mathbb{Z}, ad - bc = 1, b \text{ ja } c \text{ ovat jaollisia luvulla } q\right\}.$$

Ryhmä Γ_q on Fuchsin ryhmä.

Harjoitustehtävä 13.6. *Osoita, että edellisen esimerkin kohdan* (7) *ryhmät* Γ_q *ovat ryhmän* Möb($\mathbb{H}$) *aliryhmiä.*

Harjoitustehtävä 13.7. *Olkoon $k > 0$, $k \neq 1$. Olkoon Γ ryhmän* Möb($\mathbb{H}$) *aliryhmä, jonka virittävät kuvaukset*

$$\gamma_1(z) = z + 1, \text{ ja } \gamma_2(z) = kz.$$

Onko Γ Fuchsin ryhmä?

Ehto Fuchsin ryhmille

Metrisen avaruuden osajoukko on diskreetti, jos sen jokainen piste on eristetty. Aliryhmän diskreettiyden selvittäminen on helpompaa. Seuraava lause kertoo, että aliryhmä on diskreetti, jos neutraalialkio on sen eristetty piste.

Lause 13.8. *Olkoon Γ ryhmän* Möb($\mathbb{H}$) *aliryhmä. Seuraavat ehdot ovat yhtäpitäviä:*

(1) *Aliryhmä* Γ *on ryhmän* Möb($\mathbb{H}$) *diskreetti aliryhmä (eli* Γ *on Fuchsin ryhmä).*
(2) *Neutraalialkio on aliryhmän* Γ *eristetty piste.*

Huomautus 13.9. Vastaava tulos on voimassa Poincarén kiekon $\mathbb{D}$ tapauksessa.

Todistus. Selvästi kohta (2) seuraa kohdasta (1). Oletetaan sitten, että ehto (2) on voimassa. Siis neutraalialkio e on ryhmän Γ eristetty piste. Tällöin on olemassa sellainen ryhmän Möb($\mathbb{H}$) avoin osajoukko U, että $\Gamma \cap U = \{e\}$. Olkoon $g \in \Gamma$. Tällöin $g \in gU$ ja gU on avoin joukko ryhmässä Möb($\mathbb{H}$). Lisäksi $gU \cap \Gamma = \{g\}$. Siis g on ryhmän Γ eristetty piste. Koska g valittiin mielivaltaisesti, seuraa tästä, että Γ on diskreetti. ☐

14. Vahvasti epäjatkuvat toiminnat

Olkoon (X, d) metrinen avaruus ja olkoon Γ ryhmä avaruuden X homeomorfismeja. Olkoon $x \in X$.

Määritelmä 14.1. Olkoon $x \in X$. Pisteen x *rata* on

$$\Gamma x = \{\gamma(x) \mid \gamma \in \Gamma\}$$

ja sen *isotropiaryhmä* on

$$\Gamma_x = \{\gamma \in \Gamma \mid \gamma(x) = x\}.$$

Määritelmä 14.2. Olkoon (X, d) metrinen avaruus ja olkoon Γ ryhmä avaruuden X isometrioita. Ryhmä Γ toimii *vahvasti epäjatkuvasti* avaruudessa X, jos kaikilla $x \in X$ ja kaikilla avaruuden X epätyhjillä kompakteilla osajoukoilla K joukko

$$\{\gamma \in \Gamma \mid \gamma(x) \in K\}$$

on äärellinen.

Huomautus 14.3. Vahvasti epäjatkuvalle toiminnalle on useita eri määritelmiä, jotka eivät ole keskenään yhtäpitäviä. Erityisesti vahvasti epäjatkuvat toiminnat voidaan määritellä topologisissa avaruuksissa, joiden ei tarvitse olla metrisiä avaruuksia. Tällöin ryhmän alkiot ovat avaruuden homeomorfismeja. Määritelmää 14.2, joka ei ole kaikkein yleisin vahvasti epäjatkuvan toiminnan määritelmä, käytetään Svetlana Katokin kirjassa *Fuchsian groups.* Jos luet Katokin kirjaa, niin huomaa, että tässä kohdassa (s. 27 - 32) on virheitä, jotka S. Katok on korjannut kotisivulleen.

Esimerkki 14.4. Mikä tahansa äärellinen ryhmä metrisen avaruuden X isometrioita toimii vahvasti epäjatkuvasti avaruudessa X.

Määritelmä 14.5. Metrinen avaruus (X, d) on *vahva*, jos kaikilla $x \in X$ ja kaikilla $\varepsilon > 0$, suljettu kiekko

$$C_\varepsilon(x) = \{y \in X \mid d(x, y) \leq \varepsilon\}$$

on kompakti.

Suoraan Määritelmästä 14.5 seuraa, että vahva metrinen avaruus on lokaalisti kompakti.

Esimerkki 14.6. Avaruus $\mathbb{R}^n$ euklidisella metriikalla varustettuna on vahva. Avaruudet $\mathbb{H}$ ja $\mathbb{D}$ hyperbolisilla metriikoilla varustettuina ovat vahvoja.

Määritelmä 14.7. Olkoon (X, d) metrinen avaruus ja olkoon $A \subset X$. Piste $x \in X$ on joukon A *kasautumispiste*, jos jokaiselle pisteen x ympäristölle U pätee $U \cap (A \setminus \{x\}) \neq \emptyset$.

Lemma 14.8. *Olkoon (X, d) metrinen avaruus ja olkoon Γ ryhmä avaruuden X isometrioita. Olkoon $x \in X$. Tällöin seuraavat ehdot ovat yhtäpitäviä:*

(1) *Rata Γx on avaruuden X diskreetti osajoukko.*
(2) *Radalla Γx ei ole kasautumispisteitä.*

Todistus. Jos radalla Γx ei ole kasautumispisteitä, niin se on diskreetti. Oletetaan sitten, että Γx on diskreetti. Oletetaan, että $s \in X$ on radan Γx kasautumispiste. Tällöin on olemassa jono radan Γx pisteitä $g_n x$, $g_n x \to s$. Olkoon $\varepsilon > 0$. Tällöin on olemassa sellainen $N \in \mathbb{N}$, että $d(g_n x, g_{n+1} x) < \varepsilon$ kaikilla $n \geq N$. Koska kuvaus g_n on isometria, pätee

$$d(g_n^{-1} g_{n+1} x, x) = d(g_n x, g_{n+1} x) < \varepsilon$$

kaikilla $n \geq \mathbb{N}$. Siis x on radan Γx kasautumispiste. Siis Γx ei voi olla diskreetti. $\square$

Olkoon (X, d) metrinen avaruus, olkoon Γ ryhmä avaruuden X isometrioita ja olkoon $x \in X$. Lemmasta 14.8 seuraa, että jos pisteen x rata Γx on diskreetti, on se välttämättä suljettu (joukko on suljettu, jos ja vain jos se sisältää kaikki kasautumispisteensä).

Lemma 14.9. *Olkon (X, d) vahva metrinen avaruus ja olkoon Γ ryhmä avaruuden X isometrioitaa. Tällöin seuraavat ehdot ovat yhtäpitäviä:*

(1) *Ryhmä Γ toimii vahvasti epäjatkuvasti avaruudessa X.*
(2) *Kaikilla $x \in X$:*
    (a) *Rata Γx on avaruuden X diskreetti osajoukko.*
    (b) *Isotropiaryhmä Γ_x on ryhmän Γ äärellinen aliryhmä.*

Todistus. Osoitetaan ensin, että jälkimmäinen ehto seuraa ensimmäisestä. Oletetaan, että ryhmä Γ toimii vahvasti epäjatkuvasti avaruudessa X. Tehdään vastaoletus ja oletetaan, että rata Γx ei ole diskreetti. Tällöin on olemassa $x_0 \in X$ ja jono (γ_n) ryhmän Γ alkioita, joille $\gamma_n(x) \to x_0$ kun n kasvaa rajatta ja $\gamma_n(x) \neq \gamma_m(x)$ kun $n \neq m$. Siis $\gamma_n \neq \gamma_m$ kun $n \neq m$. Olkoon $\varepsilon > 0$ ja olkoon $K = C_\varepsilon(x_0)$. Koska X on vahva metrinen avaruus, on K kompakti. Koska $\gamma_n(x) \to x_0$, on olemassa sellainen $N \in \mathbb{N}$, että $\gamma_n(x) \in K$ kaikilla $n \geq N$. Niinpä on olemassa äärettömän monta ryhmän Γ alkiota γ_n, jolle $\gamma_n(x) \in K$. Päädyimme ristiriitaan, koska oletuksen mukaan Γ toimii vahvasti epäjatkuvasti avaruudessa X. Siis radan Γx täytyy olla diskreetti.

Olkoon sitten $x \in X$ ja $K = \{x\}$. Tällöin K on kompakti. Selvästi

$$\Gamma_x = \{\gamma \in \Gamma \mid \gamma(x) = x\} = \{\gamma \in \Gamma \mid \gamma(x) \in K\}.$$

Koska Γ toimii vahvasti epäjatkuvasti avaruudessa X, on $\{\gamma \in \Gamma \mid \gamma(x) \in K\}$ äärellinen. Siis Γ_x on äärellinen.

Osoitetaan sitten, että ensimmäinen ehto seuraa jälkimmäisestä. Oletetaan siis, että kaikilla $x \in X$, rata Γx on diskreetti ja isotropiaryhmä Γ_x on äärellinen. Olkoon K avaruuden X kompakti osajoukko, $K \neq \emptyset$. Olkoon $x \in X$. Osoitetaan, että $\{\gamma \in \Gamma \mid \gamma(x) \in K\}$ on äärellinen. Tehdään taas vastaoletus ja oletetaan, että $\{\gamma \in \Gamma \mid \gamma(x) \in K\}$ sisältää äärettömän monta eri alkiota γ_n, $n \in \mathbb{N}$. Tarkastellaan joukkoa $\{\gamma_n(x)\} \subset K$. Joukko $\{\gamma_n(x)\}$ voi olla joko äärellinen tai ääretön.

Jos $\{\gamma_n(x)\}$ on ääretön, niin jonolla $(\gamma_n(x))$ on suppeneva osajono. Osajonoon siirtymällä voidaan olettaa, että $\gamma_n(x) \neq \gamma_m(x)$ kaikilla n, m, $n \neq m$. Niinpä joukolla $\{\gamma_n(x)\}$ on kasautumispiste. Päädyimme ristiriitaan, koska oletuksen mukaan rata Γx on diskreetti ja Lemman 14.8 perusteella diskreetillä radalla ei voi olla kasautumispisteitä.

Oletetaan seuraavaksi, että $\{\gamma_n(x)\}$ on äärellinen. Kirjoitetaan

$$\{\gamma_n(x)\} = \{x^1, \dots, x^k\}.$$

Tarkastellaan joukkoa $B_j = \{\gamma_n \mid \gamma_n(x) = x^j\}$ kaikilla $j \in \{1, \dots, k\}$. Osoitetaan, että B_j on äärellinen kaikilla j. Koska Γ_x on äärellinen, voidaan kirjoittaa $\Gamma_x = \{g_1, \dots, g_r\}$. Valitaan $\gamma_*^j \in B_j$, kaikilla $j \in \{1, \dots, k\}$. Olkoon $\gamma \in B_j$. Tällöin

$$\gamma(x) = x^j = \gamma_*^j(x),$$

joten $(\gamma_*^j)^{-1}\gamma(x) = x$ eli $(\gamma_*^j)^{-1}\gamma \in \Gamma_x$. Tästä seuraa, että $(\gamma_*^j)^{-1}\gamma = g_l$ jollakin $l \in \{1, \dots, r\}$, joten $\gamma = \gamma_*^j g_l$. Niinpä B_j on äärellinen kaikilla j, mistä seuraa, että myös $\{\gamma_n\}$ on äärellinen. Päädyimme ristiriitaan, joten vastaoletus on väärä. □

Lause 14.10. *Olkon (X, d) vahva metrinen avaruus ja olkoon Γ ryhmä avaruuden X isometrioita. Tällöin seuraavat ehdot ovat yhtäpitäviä:*

(1) *Ryhmä Γ toimii vahvasti epäjatkuvasti avaruudessa X.*
(2) *Jokaisella avaruuden X pisteellä x on sellainen ympäristö U_x, että*

$$\gamma(U_x) \cap U_x \neq \emptyset$$

ainoastaan äärellisen monella $\gamma \in \Gamma$.

Todistus. Lemman 14.9 perusteella ryhmä Γ toimii vahvasti epäjatkuvasti, jos ja vain jos rata Γx on diskreetti ja isotropiaryhmä Γ_x on äärellinen kaikilla $x \in X$.

Osoitetaan ensin, että jälkimmäinen ehto seuraa ensimmäisestä. Olkoon $x \in X$. Koska rata Γx on diskreetti, on olemassa sellainen $\varepsilon > 0$, että $B_\varepsilon(x) \cap \Gamma x = \{x\}$. Olkoon U pisteen x ympäristö, $U \subset B_{\frac{\varepsilon}{2}}(x)$. Oletetaan, että $\gamma(U) \cap U \neq \emptyset$. Tällöin on olemassa $y \in \gamma(U) \cap U$. Koska $y \in U$, on $d(x, y) < \frac{\varepsilon}{2}$. Kolmioepäyhtälön perusteella

$$d(x, \gamma(x)) \leq d(x, y) + d(y, \gamma(x)) < \varepsilon.$$

Siis $\gamma(x) \in B_\varepsilon(x)$. Koska $B_\varepsilon(x) \cap \Gamma x = \{x\}$, täytyy olla $\gamma(x) = x$ eli $\gamma \in \Gamma_x$. Koska Γ_x on äärellinen, on olemassa ainoastaan äärellisen monta ryhmän Γ alkiota γ, jolle $\gamma(U) \cap U \neq \emptyset$.

Osoitetaan sitten, että ensimmäinen ehto seuraa jälkimmäisestä. Olkoon $x \in X$. Tehdään vastaoletus ja oletetaan, että Γx ei ole diskreetti. Lemman 14.8 perusteella radalla Γx on kasautumispiste. Siis on olemassa jono (γ_n) ryhmän Γ

alkioita, missä $\gamma_n \neq \gamma_m$ kun $n \neq m$, joka suppenee kohti pistettä $x' \in X$ ja jonka alkioille pätee $\gamma_n(x) \neq x'$ kaikilla n. Olkoon U pisteen x' sellainen ympäristö, että joukko $\{\gamma \in \Gamma \mid \gamma(U) \cap U \neq \emptyset\}$ on äärellinen. Tällöin on olemassa sellainen $N \in \mathbb{N}$, että $\gamma_n(x) \in U$ kaikilla $n \geq N$. Olkoon $n \geq N$. Tällöin $\gamma_n(x) \in U$ ja $\gamma_N(x) \in U$, joten $x \in \gamma_n^{-1}(U) \cap \gamma_N^{-1}(U)$. Niinpä

$$\gamma_N^{-1}(U \cap \gamma_N\gamma_n^{-1}(U)) = \gamma_N^{-1}(U) \cap \gamma_n^{-1}(U) \neq \emptyset,$$

mistä seuraa, että $U \cap \gamma_N\gamma_n^{-1}(U) \neq \emptyset$. Oletuksen mukaan joukko $\{\gamma \in \Gamma \mid \gamma(U) \cap U \neq \emptyset\}$ on äärellinen. Niinpä joukko $\{\gamma_N\gamma_n^{-1} \mid n \geq N\}$ on äärellinen. Päädyimme ristiriitaan, koska $\gamma_n \neq \gamma_m$ kun $n \neq m$.

Olkoon sitten $x \in X$ ja oletetaan, että isotropiaryhmä γ_x on ääretön. Tällöin on olemassa äärettömän monta eri kuvausta $\gamma_n \in \Gamma$, joille $\gamma_n(x) = x$. Olkoon U pisteen x ympäristö, jolle $\{\gamma \in \Gamma \mid \gamma(U) \cap U \neq \emptyset\}$ on äärellinen. Tällöin $x = \gamma_n(x) \in \gamma_n(U)$, joten $x \in \gamma_n(U) \cap U$. Päädyimme taas ristiriitaan, koska $\{\gamma \in \Gamma \mid \gamma(U) \cap U \neq \emptyset\}$ on äärellinen. □

Fuchsin ryhmät ja vahvasti epäjatkuvat toiminnat

Tässä luvussa todistamme seuraavan tuloksen:

Teoreema 14.11. *Olkoon* Γ *ryhmän* $\mathrm{Möb}(\mathbb{H})$ *(tai ryhmän* $\mathrm{Möb}(\mathbb{D})$*) aliryhmä. Tällöin* Γ *on Fuchsin ryhmä, jos ja vain jos se toimii vahvasti epäjatkuvasti ylemmässä puolitasossa* $\mathbb{H}$ *(tai Poincarén kiekolla* $\mathbb{D}$*).*

Todistetaan Teoreema 14.11 ylemmän puolitason tapauksessa. Ensin tarvitsemme seuraavan lemman:

Lemma 14.12. *Olkoon* K *ylemmän puolitason* $\mathbb{H}$ *kompakti, epätyhjä osajoukko. Olkoon* $z_0 \in \mathbb{H}$*. Tällöin joukko*

$$E = \{\gamma \in \mathrm{Möb}(\mathbb{H}) \mid \gamma(z_0) \in K\}$$

on ryhmän $\mathrm{Möb}(\mathbb{H})$ *kompakti osajoukko.*

Todistus. Olkoon

$$\theta \colon \mathrm{SL}(2;\mathbb{R}) \to \mathrm{Möb}(\mathbb{H}), \ \ A \mapsto \gamma_A,$$

missä

$$\gamma_A(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \quad \text{jos} \quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Kuvaus θ on jatkuva. Olkoon

$$E' = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2;\mathbb{R}) \mid \frac{az_0+b}{cz_0+d} \in K \right\}.$$

Tällöin $\theta(E') = E$. Koska θ jatkuvana kuvauksena kuvaa kompaktit joukot kompakteiksi joukoiksi, riittää osoittaa, että E' on kompakti. Samastamalla matriisi

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

vektorin $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ kanssa, voimme ajatella ryhmää $\mathrm{SL}(2;\mathbb{R})$ euklidisen avaruuden $\mathbb{R}^4$ osajoukkona. Niinpä kun halutaan näyttää, että E' on kompakti, riittää osoittaa, että se on suljettu ja rajoitettu avaruudessa $\mathbb{R}^4$. (Huom. Ryhmä $\mathrm{SL}(2;\mathbb{R})$ on suljettu avaruudessa $\mathbb{R}^4$, koska $\mathrm{SL}(2;\mathbb{R}) = \det^{-1}(1)$ ja determinanttikuvaus on jatkuva. Siis E' on suljettu avaruudessa $\mathbb{R}^4$, jos se on suljettu ryhmässä $\mathrm{SL}(2;\mathbb{R})$). Olkoon

$$\psi\colon \mathrm{SL}(2;\mathbb{R}) \to \mathbb{H}, \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \frac{az_0 + b}{cz_0 + d}.$$

Tällöin ψ on jatkuva ja $E' = \psi^{-1}(K)$. Koska K on kompakti, se on suljettu ylemmässä puolitasossa $\mathbb{H}$. Niinpä E' on suljettu. Koska K on kompakti, se on rajoitettu. Siis on olemassa sellainen $M_1 > 0$, että

$$\left|\frac{az_0 + b}{cz_0 + d}\right| \leq M_1, \quad \text{kaikilla} \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in E'.$$

Koska K on kompakti, sillä ei voi olla pisteitä mielivaltaisen lähellä reaaliakselia. Siis on olemassa sellainen $M_2 > 0$, että

$$\mathrm{im}\left(\frac{az_0 + b}{cz_0 + d}\right) \geq M_2, \quad \text{kaikilla} \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in E'.$$

Koska

$$\mathrm{im}\left(\frac{az_0 + b}{cz_0 + d}\right) = \frac{1}{|cz_0 + d|^2}\mathrm{im}(z_0),$$

täytyy olla

$$|cz_0 + d| \leq \sqrt{\frac{\mathrm{im}(z_0)}{M_2}} = C_1 \qquad (*)$$

ja

$$|az_0 + b| \leq M_1\sqrt{\frac{\mathrm{im}(z_0)}{M_2}} = C_2. \qquad (**)$$

Huomaa, että vakiot C_1 ja C_2 eivät riipu luvuista a, b, c ja d. Kirjoitetaan $z_0 = x_0 + iy_0$. Voidaan olettaa, että $x_0 \geq 0$. (Tapauksen $x_0 < 0$ todistus on samanlainen.) Yhtälöstä $(*)$ seuraa, että

$$(cx_0 + d)^2 + c^2y_0^2 = |cz_0 + d|^2 \leq C_1,$$

joten $|c| \leq \frac{C_1}{y_0}$. Koska myös $|cx_0 + d| \leq C_1$, pätee

$$-C_1 - \frac{C_1x_0}{y_0} \leq -C_1 - cx_0 \leq d \leq C_1 - cx_0 \leq C_1 + \frac{C_1x_0}{y_0}.$$

Siis matriisialkiot c ja d ovat rajoitettuja. Samalla tavalla yhtälöstä $(**)$ seuraa, että matriisialkiot a ja b ovat rajoitettuja. Siis E' on rajoitettu. $\square$

Lause 14.13. *Olkoon Γ ryhmän $\mathrm{Möb}(\mathbb{H})$ aliryhmä, joka toimii vahvasti epäjatkuvasti ylemmässä puolitasossa. Olkoon $p \in \mathbb{H}$ ja oletetaan, että $\gamma(p) = p$ jollakin $\gamma \in \Gamma \setminus \{\mathrm{id}\}$. Tällöin pisteellä p on sellainen ympäristö W, että $\gamma'(q) \neq q$ kaikilla $q \in W \setminus \{p\}$ ja kaikilla $\gamma' \in \Gamma \setminus \{\mathrm{id}\}$.*

Huomautus 14.14. Lauseesta 14.13 seuraa, että on olemassa sellainen ylemmän puolitason piste q, että $\gamma(q) \neq q$ kaikilla $q \in \Gamma \setminus \{\mathrm{id}\}$. Tätä tulosta tarvitaan myöhemmin.

Todistus. Tehdään vastaoletus: Oletetaan, että on olemassa pisteet $p_n \in \mathbb{H}$ ja kuvaukset $\gamma_n \in \Gamma \setminus \{\mathrm{id}\}$, joille $p_n \to p$ kun $n \to \infty$ ja $\gamma_n(p_n) = p_n$. Voidaan olettaa, että $p_n \neq p_m$ kun $n \neq m$. Koska $p_n \in \mathbb{H}$, ovat kuvaukset γ_n elliptisiä Möbius-kuvauksia. Koska kuvauksilla γ_n ja γ_m on eri kiintopisteet kun $n \neq m$, on $\gamma_n \neq \gamma_m$ kun $n \neq m$.

Olkoot $\varepsilon > 0$ ja

$$C_{3\varepsilon}(p) = \{q \in \mathbb{H} \mid d_{\mathbb{H}}(p, q) \leq 3\varepsilon\}.$$

Tällöin $C_{3\varepsilon}(p)$ on kompakti. Koska Γ toimii vahvasti epäjatkuvasti ylemmässä puolitasossa, on joukko

$$A = \{\gamma \in \Gamma \mid \gamma(p) \in C_{3\varepsilon}(p)\}$$

äärellinen. Niinpä $\gamma_n \in A$ ainoastaan äärellisen monella $n \in \mathbb{N}$. Siis on olemassa sellainen $N_1 \in \mathbb{N}$, että jos $n \geq N_1$, niin $d_{\mathbb{H}}(\gamma_n(p), p) > 3\varepsilon$. Koska $p_n \to p$, on olemassa sellainen N_2, että jos $n \geq N_2$, niin $d_{\mathbb{H}}(p_n, p) < \varepsilon$. Olkoon $N = \max\{N_1, N_2\}$ ja olkoon $n \geq N$. Tällöin

$$d_{\mathbb{H}}(\gamma_n(p), p) \leq d_{\mathbb{H}}(\gamma_n(p), \gamma_n(p_n)) + d_{\mathbb{H}}(\gamma_n(p_n), p).$$

Koska γ_n on isometria ja $\gamma_n(p_n) = p_n$, on ylläolevan epäyhtälön oikea puoli

$$d_{\mathbb{H}}(p, p_n) + d_{\mathbb{H}}(p_n, p) \leq 2\varepsilon.$$

Päädyimme ristiriitaan, joten vastaoletus on väärä. □

Esimerkki 14.15. Lauseen 14.13 väite ei välttämättä päde yleisemmin, jos Γ on ryhmä metrisen avaruuden (X, d) isometrioita. Esimerkiksi kuvaukset f ja id, missä

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \;\; (x, y) \mapsto (-x, y),$$

ja

$$\mathrm{id}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \;\; (x, y) \mapsto (x, y),$$

ovat euklidisen avaruuden $\mathbb{R}^2$ isometrioita ja ne muodostavat ryhmän. Kuvaukselle f pätee $f(0,0) = (0,0)$. Mielivaltaisen lähellä pistettä $(0,0)$ on pisteitä $(0, y)$ ja $f(0, y) = (0, y)$, eli myös pisteet $(0, y)$ ovat kuvauksen f kiintopisteitä.

Teoreeman 14.11 todistus. Oletetaan, että Γ on Fuchsin ryhmä. Olkoon K ylemmän puolitason epätyhjä kompakti osajoukko. Olkoon $z \in \mathbb{H}$. Tällöin

$$\{\gamma \in \Gamma \mid \gamma(z) \in K\} = \{\gamma \in \mathrm{Möb}(\mathbb{H}) \mid \gamma(z) \in K\} \cap \Gamma.$$

Lemman 14.12 perusteella joukko $A = \{\gamma \in \mathrm{Möb}(\mathbb{H}) \mid \gamma(z) \in K\}$ on kompakti. Koska Γ on diskreetti ja suljettu (Lemma 12.4), on $A \cap \Gamma$ äärellinen. Siis $\{\gamma \in \Gamma \mid \gamma(z) \in K\}$ on äärellinen, mistä seuraa, että Γ toimii vahvasti epäjatkuvasti ylemmässä puolitasossa.

Oletetaan seuraavaksi, että Γ toimii vahvasti epäjatkuvasti ylemmässä puolitasossa. Oletetaan, että Γ ei ole diskreetti. Lauseen 14.13 perusteella ylemmässä puolitasossa on piste p, jolle $\gamma(p) \neq p$ kaikilla $\gamma \in \Gamma \setminus \{\mathrm{id}\}$. Koska Γ ei ole diskreetti, on olemassa jono (γ_n) ryhmän Γ alkioita, joille $\gamma_n \to \mathrm{id}$ ja $\gamma_n \neq \gamma_m$ kun $n \neq m$. Tällöin $\gamma_n(p) \mapsto p$ ja $\gamma_n(p) \neq p$ kaikilla n.

Olkoon U pisteen p mielivaltainen ympäristö. Tällöin $\gamma_n(p) \in U$ kaikilla riittävän suurilla n. Selvästi $\gamma_n(p) \in \gamma_n(U)$. Siis on olemassa äärettömän monta kuvausta $\gamma_n \in \Gamma$, joille $\gamma_n(U) \cap U \neq \emptyset$. Tämä on ristiriidassa Lauseen 14.10 kanssa. Niinpä ryhmä Γ on diskreetti. □

Esimerkki 14.16. Olkoon $\Gamma = \{\gamma_n \mid \gamma_n(z) = 2^n z, n \in \mathbb{Z}\}$. Pisteen $z \in \mathbb{H}$ rata on

$$\Gamma(z) = \{2^n z \mid n \in \mathbb{Z}\}.$$

Osoitetaan, että $\Gamma(z)$ on ylemmän puolitason $\mathbb{H}$ diskreetti osajoukko. Huomaa, että pisteet $2^n z$ ovat euklidisella suoralla, joka kulkee origon ja pisteen z kautta. Olkoon $n \in \mathbb{N}$. Tarkastellaan pistettä $2^n z$. Olkoon $\delta = 2^{n-1}|z|$. Tällöin

$$|2^m z - 2^n z| \geq \delta$$

kaikilla $m \in \mathbb{Z}$, $m \neq n$. Niinpä $\Gamma(z)$ on diskreetti.

Huomautus 14.17. Ryhmän $\mathrm{Möb}(\mathbb{H})$ aliryhmä Γ toimii myös reunalla $\partial\mathbb{H}$. Huomaa, että pisteen $z \in \partial\mathbb{H}$ radan $\Gamma(z)$ ei tarvitse olla diskreetti vaikka aliryhmä Γ olisi diskreetti. Tarkastellaan esimerkiksi modulaariryhmää

$$\mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z}) = \left\{ \gamma(z) = \frac{az+b}{cz+d} \mid a, b, c, d \in \mathbb{Z},\ ad - bc = 1 \right\}.$$

Aiemmin todettiin, että $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z})$ on Fuchsin ryhmä. Pisteen $0 \in \partial\mathbb{H}$ rata on

$$\mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z})(0) = \{b/d \mid ad - bc = 1\} = \mathbb{Q} \cup \{\infty\},$$

mikä ei ole reunan $\partial\mathbb{H}$ diskreetti osajoukko.

Fuchsin ryhmän kasautumispisteet

Tässä luvussa tarkastelemme ratojen Γx kasautumispisteitä kun Γ on Fuchsin ryhmä. Kasautumispisteitä on kätevä tarkastella Poincarén kiekolla, joten oletamme, että $\Gamma \subset \mathrm{Möb}(\mathbb{D})$. Radalla Γx, $x \in \mathbb{D}$, ei ole kasautumispisteitä Poincarén kiekolla. Jos niitä on, niin ne ovat reunalla $\partial\mathbb{D}$. Niinpä ajattelemme rataa Γx joukon

$$\mathbb{D} \cup \partial\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}$$

osajoukkona. Joukossa $\mathbb{D} \cup \partial\mathbb{D}$ on euklidinen topologia, joten jono (z_n) joukon $\mathbb{D} \cup \partial\mathbb{D}$ pisteitä suppenee kohti pistettä $z \in \mathbb{D} \cup \partial\mathbb{D}$, jos $|z_n - z| \to 0$ kun $n \to \infty$.

Määritelmä 14.18. Olkoon Γ ryhmän $\mathrm{Möb}(\mathbb{D})$ diskreetti aliryhmä (eli Γ on Fuchsin ryhmä) ja olkoon $z \in \mathbb{D}$. Radan Γz kasautumispisteitten joukolle käytetään merkintää $\Lambda(\Gamma z)$.

Huomautus 14.19. Olkoon $z \in \mathbb{D}$. Tällöin $\xi \in \partial\mathbb{D}$ kuuluu joukkoon $\Lambda(\Gamma z)$, jos ja vain jos on olemassa jono (γ_n), missä $\gamma_n \in \Gamma$ kaikilla n ja $\gamma_n(z) \to \xi$ kun $n \to \infty$.

Lause 14.20. *Olkoon Γ Fuchsin ryhmä ja olkoot $z_1, z_2 \in \mathbb{D}$. Tällöin $\Lambda(\Gamma z_1) = \Lambda(\Gamma z_2)$.*

Todistus. Pisteitten z_1 ja z_2 hyperboliselle etäisyydelle $d_{\mathbb{D}}(z_1, z_2)$ pätee

$$\sinh^2\big(\frac{1}{2}d_{\mathbb{D}}(z_1, z_2)\big) = \frac{|z_1 - z_2|^2}{(1 - |z_1|^2)(1 - |z_2|^2)}.$$

Olkoon $\gamma \in \Gamma$. Koska γ on Poincarén kiekon isometria, pätee

$$\sinh^2\big(\frac{1}{2}d_{\mathbb{D}}(z_1, z_2)\big) = \sinh^2\big(\frac{1}{2}d_{\mathbb{D}}(\gamma(z_1), \gamma(z_2))\big) = \frac{|\gamma(z_1) - \gamma(z_2)|^2}{(1 - |\gamma(z_1)|^2)(1 - |\gamma(z_2)|^2)}.$$

Niinpä kaikilla $\gamma \in \Gamma$,

$$|\gamma(z_1) - \gamma(z_2)| \leq (1 - |\gamma(z_1)|^2)^{\frac{1}{2}} \sinh\big(\frac{1}{2}d_{\mathbb{D}}(z_1, z_2)\big). \qquad (*)$$

Olkoon $\xi \in \Lambda(\Gamma z_1)$. Näytetään, että $\xi \in \Lambda(\Gamma z_2)$. Koska $\xi \in \partial\mathbb{D}$, pätee $|\gamma_n(z_1)| \to |\xi| = 1$ kun $n \to \infty$. Yhtälöstä $(*)$ seuraa, että $|\gamma_n(z_1) - \gamma_n(z_2)| \to 0$ kun $n \to \infty$. Siis $\gamma_n(z_2) \to \xi$ kun $n \to \infty$, joten $\xi \in \Lambda(\Gamma z_2)$. Siis $\Lambda(\Gamma z_1) \subset \Lambda(\Gamma z_2)$. Samoin voidaan päätellä, että $\Lambda(\Gamma z_2) \subset \Lambda(\Gamma z_1)$. Siis $\Lambda(\Gamma z_1) = \Lambda(\Gamma z_2)$. $\square$

Koska Fuchsin ryhmän Γ kaikilla radoilla on Lauseen 14.20 nojalla samat kasautumispisteitten joukot, voidaan joukolle $\Lambda(\Gamma z)$ tästä lähtien käyttää merkintää $\Lambda(\Gamma)$.

Huomautus 14.21. Ratojen kasautumispisteitten joukkoja voidaan tietenkin tarkastella myös ylemmän puolitason tapauksessa. Olkoon Γ Fuchsin ryhmä, $\Gamma \subset \text{Möb}(\mathbb{H})$. Olkoon $z \in \mathbb{H}$. Tällöin radan Γz kasautumispisteitten joukko $\Lambda(\Gamma z) \subset \partial\mathbb{H}$. Pistettä $\xi \in \mathbb{R} \subset \partial\mathbb{H}$ sanotaan radan Γz kasautumispisteeksi, jos on olemassa kuvaukset $\gamma_n \in \Gamma$, joille $|\gamma_n(z) - \xi| \to 0$ kun $n \to \infty$. Pistettä $\infty \in \partial\mathbb{H}$ sanotaan radan Γz kasautumispisteeksi, jos kaikilla $K > 0$ on olemassa $\gamma \in \Gamma$, jolle $|\gamma(z)| > K$.

Olkoon

$$h\colon \mathbb{H} \to \mathbb{D}, \;\; z \mapsto \frac{z - i}{iz - 1},$$

kuvaus, jota olemme käyttäneet kun olemme siirtäneet ylemmän puolitason ominaisuuksia Poincarén kiekolle ja päinvastoin. Olkoon $\Gamma \subset \text{Möb}(\mathbb{H})$ Fuchsin ryhmä ja olkoon $\Lambda_{\mathbb{H}}(\Gamma)$ ryhmän Γ kasautumispisteitten joukko. Tällöin $h\Gamma h^{-1} \subset \text{Möb}(\mathbb{D})$ on myös Fuchsin ryhmä ja sen kasautumispisteitten joukko on $\Lambda_{\mathbb{D}}(h(\Gamma)h^{-1}) = h(\Lambda_{\mathbb{H}}(\Gamma))$.

Esimerkki 14.22.

(1) Olkoon $\Gamma = \{\gamma_n \mid \gamma_n(z) = 2^n z, n \in \mathbb{Z}\}$. Tällöin $\Gamma \subset \text{Möb}(\mathbb{H})$ on Fuchsin ryhmä. Tarkastellaan pisteen $i \in \mathbb{H}$ radan kasautumispisteitä. Kun $n \to \infty$, niin myös $\gamma_n(i) \to \infty$. Kun $n \to \infty$, niin $\gamma_{-n}(i) \to 0$. Ryhmän Γ kasautumispisteitten joukko on $\Lambda(\Gamma) = \{0, \infty\}$.

(2) Olkoon $\Gamma = \text{PSL}(2; \mathbb{Z})$ ylemmän puolitason Fuchsin ryhmä. Myöhemmin osoitetaan, että $\Lambda(\Gamma) = \partial\mathbb{H}$.

Harjoitustehtävä 14.23. *Olkoon* $\Gamma = \{\gamma_n \mid \gamma_n(z) = z + n, n \in \mathbb{Z}\}$ *ylemmän puolitason Fuchsin ryhmä. Määritä kasautumispisteitten joukko* $\Lambda(\Gamma)$.

Määritelmä 14.24. Olkoot Γ_1 ja Γ_2 ylemmän puolitason (tai Poincarén kiekon) Fuchsin ryhmiä. Jos on olemassa $g \in \text{Möb}(\mathbb{H})$ (tai $g \in \text{Möb}(\mathbb{D})$), jolle

$$\Gamma_2 = g^{-1}\Gamma_1 g = \{g^{-1}\gamma_1 g \mid \gamma_1 \in \Gamma_1\},$$

niin sanotaan että ryhmät Γ_1 ja Γ_2 ovat toistensa *konjugaatteja.*

Lause 14.25. *Olkoot* Γ_1 *ja* Γ_2 *Fuchsin ryhmiä. Olkoon* $g \in \text{Möb}(\mathbb{D})$ *sellainen, että* $\Gamma_2 = g^{-1}\Gamma_1 g$. *Tällöin*

$$\Lambda(\Gamma_2) = g^{-1}(\Lambda(\Gamma_1)).$$

Todistus. Olkoon $\xi \in \Lambda(\Gamma_1)$. Tällöin on olemassa $z \in \mathbb{D}$ ja jono kuvauksia $\gamma_n \in \Gamma_1$, joille $\gamma_n(z) \to \xi$ kun $n \to \infty$. Huomaa, että $\gamma'_n = g^{-1}\gamma_n g \in \Gamma_2$. Niinpä

$$\gamma'_n(g^{-1}z) = g^{-1}\gamma_n g(g^{-1}z) = g^{-1}(\gamma_n(z)) \to g^{-1}(\xi)$$

kun $n \to \infty$. Siis

$$g^{-1}(\Lambda(\Gamma_1)) \subset \Lambda(\Gamma_2).$$

Samalla tavoin nähdään, että

$$g(\Lambda(\Gamma_2)) \subset \Lambda(\Gamma_1).$$

□

Lause 14.26. *Olkoon* $\Gamma \subset \text{Möb}(\mathbb{D})$ *Fuchsin ryhmä. Tällöin kasautumispisteitten joukko* $\Lambda(\Gamma)$ *on suljettu.*

Todistus. Olkoon $\xi_n \in \Lambda(\Gamma)$, kaikilla n. Oletetaan, että $\xi_n \to \xi \in \partial\mathbb{D}$ kun $n \to \infty$ ja osoitetaan, että $\xi \in \Lambda(\Gamma)$. Olkoon $z \in \mathbb{D}$. Koska $\xi_n \in \Lambda(\Gamma)$, kaikilla $m, n \in \mathbb{N}$ on olemassa sellainen $\gamma_{m,n} \in \Gamma$, että

$$|\gamma_{m,n}(z) - \xi_n| < \frac{1}{m}.$$

Käytetään kuvaukselle $\gamma_{n,n}$ merkintää $\gamma_{(n)}$. Olkoon $\varepsilon > 0$. Koska $\xi_n \to \xi$, on olemassa sellainen $N_1 \in \mathbb{N}$, että

$$|\xi_n - \xi| < \varepsilon/2,$$

kaikilla $n > N_1$. Olkoon $N_2 \in \mathbb{N}$ sellainen, että

$$\frac{1}{N_2} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Olkoon $n > \max\{N_1, N_2\}$. Tällöin

$$|\gamma_{(n)}(z) - \xi| \le |\gamma_{(n)}(z) - \xi_n| + |\xi_n - \xi| \le \varepsilon.$$

Siis $\xi \in \Lambda(\Gamma)$. □

Korollaari 14.27. *Olkoon* $\Gamma \subset \text{Möb}(\mathbb{D})$ *Fuchsin ryhmä. Tällöin kasautumispisteitten joukko* $\Lambda(\Gamma)$ *on kompakti.*

Todistus. Lauseen 14.26 perusteella $\Lambda(\Gamma)$ on kompaktin joukon $\partial\mathbb{D}$ suljettu osajoukko. Siis $\Lambda(\Gamma)$ on kompakti. □

Määritelmä 14.28. Olkoon $\Gamma \subset \text{Möb}(\mathbb{D})$ Fuchsin ryhmä ja olkoon $A \subset \mathbb{D} \cup \partial\mathbb{D}$. Jos $\gamma(A) = A$ kaikilla $\gamma \in \Gamma$, sanotaan, että joukko A on Γ-*invariantti.*

Lause 14.29. *Olkoon $\Gamma \subset \text{Möb}(\mathbb{D})$ Fuchsin ryhmä. Tällöin kasautumispisteitten joukko $\Lambda(\Gamma)$ on Γ-invariantti.*

Todistus. Olkoon $\gamma \in \Gamma$. Näytetään, että $\gamma(\Lambda(\Gamma)) = \Lambda(\Gamma)$.

Olkoon $\xi \in \Lambda(\Gamma)$. Tällöin on olemassa $z \in \mathbb{D}$ ja $\gamma_n \in \Gamma$, $\gamma_n(z) \to \xi$ kun $n \to \infty$. Koska Γ on ryhmä, pätee $\gamma\gamma_n \in \Gamma$ kaikilla n. Koska $\gamma\gamma_n(z) \to \gamma(\xi)$, pätee $\gamma(\xi) \in \Lambda(\Gamma)$. Siis $\gamma(\Lambda(\Gamma)) \subset \Lambda(\Gamma)$.

Vaihtamalla yllä kuvauksen γ paikalle kuvaus γ^{-1}, voidaan samalla tavalla osoittaa, että $\Lambda(\Gamma)) \subset \gamma(\Lambda(\Gamma))$. Siis

$$\Lambda(\Gamma)) = \gamma(\Lambda(\Gamma)).$$

□

Lause 14.30. *Olkoon Γ Fuchsin ryhmä.*

(1) *Oletetaan, että $\gamma \in \Gamma$ on parabolinen Möbius-kuvaus. Tällöin kuvauksen γ kiintopiste $\xi \in \Lambda(\Gamma)$.*
(2) *Oletetaan, että $\gamma \in \Gamma$ on hyperbolinen Möbius-kuvaus. Tällöin kuvauksen γ molemmat kiintopisteet $\xi_1, \xi_1 \in \Lambda(\Gamma)$.*

Todistus. Todistetaan lauseen ensimmäinen väite ylemmän puolitason tapauksessa. Oletetaan, että γ on parabolinen. Tällöin on olemassa $g \in \text{Möb}(\mathbb{H})$, jolle $g^{-1}\gamma g(z) = z + b$ kaikilla $z \in \mathbb{H}$, missä $b \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$. Niinpä

$$g^{-1}\gamma^n g(z) = z + bn \to \infty \in \partial\mathbb{H}$$

kun $n \to \infty$. Huomaa, että $\xi = g(\infty)$ on kuvauksen γ yksikäsitteinen kiintopiste. Siis

$$\gamma^n(g(z)) \to \xi$$

kun $n \to \infty$, joten $\xi \in \Lambda(\Gamma)$. □

Harjoitustehtävä 14.31. *Todista Lauseen 14.30 kohta* (2).

Harjoitustehtävä 14.32. *Olkoot $p, q \in \mathbb{Z}$, $q \neq 0$. Olkoon $\gamma \in \text{Möb}(\mathbb{H})$,*

$$\gamma(z) = \frac{(1+pq)z - p^2}{q^2 z + (1-pq)}.$$

Osoita, että $\gamma \in \text{PSL}(2;\mathbb{Z})$. Etsi kuvauksen γ kiintopisteet ja osoita, että

$$\Lambda(\text{PSL}(2;\mathbb{Z})) = \partial\mathbb{H}.$$

Lause 14.33. *Olkoon Γ Fuchsin ryhmä ja olkoon $\Lambda(\Gamma)$ ryhmän Γ kasautumispisteitten joukko. Tällöin joukossa $\Lambda(\Gamma)$ on joko 0, 1, 2 tai äärettömän monta alkiota.*

Todistus. Ks. Svetlana Katok: Fuchsian Groups, Theorem 3.4.6. □

Esimerkki 14.34. Etsi sellaiset Fuchsin ryhmät Γ_0, Γ_1, Γ_2 ja Γ_∞, että ryhmän Γ_j kasautumispisteitten joukossa $\Lambda(\Gamma_j)$ on täsmälleen j alkiota kun $j = 0, 1, 2$ tai ∞.

15. Fuchsin ryhmien algebrallisia ominaisuuksia

Sykliset ryhmät

Määritelmä 15.1. Ryhmää Γ sanotaan *sykliseksi*, jos sillä on sellainen alkio γ, että

$$\Gamma = \{\gamma^n \mid n \in \mathbb{Z}\}.$$

Tällöin sanomme, että γ *virittää* ryhmän Γ ja että γ on ryhmän Γ *virittäjä*.

Harjoitustehtävä 15.2. *Osoita, että jokainen syklinen ryhmä on Abelin ryhmä.*

Esimerkki 15.3.

(1) Fuchsin ryhmät

$$\Gamma_1 = \{\gamma_n \mid \gamma_n(z) = z + n, n \in \mathbb{Z}\} \text{ ja } \Gamma_1 = \{\gamma_n \mid \gamma_n(z) = 2^n z, n \in \mathbb{Z}\}$$

ovat syklisiä. Kuvaus $z \mapsto z + 1$ virittää ryhmän Γ_1 ja kuvaus $z \mapsto 2z$ virittää ryhmän Γ_2.

(2) Fuchsin ryhmä

$$\Gamma = \{\gamma_k \mid \gamma_k(z) = e^{i2\pi k/n} z, k = 0, 1, \ldots, n-1\}$$

on syklinen. Sen virittää kuvaus $z \mapsto e^{i2\pi/n} z$.

Lemma 15.4.

(1) *Reaalilukujen ryhmän* $(\mathbb{R}, +)$ *jokainen epätriviaali diskreetti aliryhmä on ääretön syklinen ryhmä.*

(2) *Yksikköympyräryhmän* $(\mathbb{S}^1, \cdot)$ *jokainen epätriviaali diskreetti aliryhmä on äärellinen syklinen ryhmä.*

Todistus. Ensimmäinen väite todistettiin luennolla, todistus lisätään myöhemmin. Toisen väitteen todistus on hyvin samantapainen. □

Keskittäjät ja Fuchsin ryhmät

Määritelmä 15.5. Olkoon Γ ryhmä ja olkoon $\gamma \in \Gamma$. Alkion γ *keskittäjä* on

$$C_\Gamma(\gamma) = \{g \in \Gamma \mid g\gamma = \gamma g\}.$$

Niiinpä Γ on Abelin ryhmä, jos ja vain jos $C_\Gamma(\gamma) = \Gamma$ kaikilla $\gamma \in \Gamma$.

Lemma 15.6. *Olkoon* $\gamma \in \text{Möb}(\mathbb{H})$ *ja olkoon* $g \in C_{\text{Möb}(\mathbb{H})}(\gamma)$*. Tällöin* z *on kuvauksen* γ *kiintopiste, jos ja vain jos* $g(z)$ *on kuvauksen* γ *kiintopiste.*

Todistus. Koska $\gamma = g^{-1}\gamma g$, pätee

$$\gamma(z) = z \Leftrightarrow g^{-1}\gamma g(z) = z \Leftrightarrow \gamma(g(z)) = g(z).$$

□

Olkoon $\gamma \in \text{Möb}(\mathbb{H})$. Seuraavaksi tutkimme kuvauksen γ keskittäjää. Tarkastelemme kolmea eri tilannetta; γ on joko parabolinen, hyperbolinen tai elliptinen.

Oletetaan ensin, että γ on parabolinen ylemmän puolitason Möbius-kuvaus. Voimme olettaa, että kuvauksen γ yksikäsitteinen kiintopiste on ∞ ja että joko $\gamma(z) = z + 1$ tai $\gamma(z) = z - 1$. Tarkastellaan tapausta $\gamma(z) = z + 1$, tapaus $\gamma(z) = z - 1$ on samanlainen. Olkoon $g \in C_{\text{Möb}(\mathbb{H})}(\gamma)$, jolloin $g\gamma = \gamma g$. Tällöin $g(\infty) = \infty$ ja g on muotoa $g(z) = az + b$, missä $a, b \in \mathbb{R}$ ja $a \neq 0$. Nyt

$$g\gamma(z) = az + a + b \quad \text{ja} \quad \gamma g(z) = az + b + 1.$$

Koska $g\gamma = \gamma g$, täytyy olla $a = 1$. Niinpä

$$C_{\text{Möb}(\mathbb{H})}(\gamma) = \{g \mid g(z) = z + b, b \in \mathbb{R}\},$$

eli $C_{\text{Möb}(\mathbb{H})}(\gamma)$ on kaikkien siirtokuvausten muodostama ryhmä.

Harjoitustehtävä 15.7. *Todista seuraavat väitteet:*

(1) *Olkoon γ hyperbolinen Möbius-kuvaus, $\gamma(z) = kz$, $k > 0$, $k \neq 1$. Tällöin*

$$C_{\text{Möb}(\mathbb{H})}(\gamma) = \{\gamma \mid \gamma(z) = \lambda z, \lambda > 0\},$$

eli $C_{\text{Möb}(\mathbb{H})}(\gamma)$ on kaikkien venytysten muodostama ryhmä.

(2) *Olkoon γ elliptinen Möbius-kuvaus, $\gamma(z) = e^{i2\pi\theta}z$. Tällöin $C_{\text{Möb}(\mathbb{D})}(\gamma)$ on kaikkien origon ympäri suoritettavien kiertojen muodostama ryhmä.*

Lemma 15.8. *Olkoot $\gamma, h \in \text{Möb}(\mathbb{H})$. Tällöin:*

(1) $C_{\text{Möb}(\mathbb{H})}(h\gamma h^{-1}) = hC_{\text{Möb}(\mathbb{H})}(\gamma)h^{-1}$.

(2) *Piste z on kuvauksen γ kiintopiste, jos ja vain jos piste $h(z)$ on kuvauksen $h\gamma h^{-1}$ kiintopiste.*

Todistus. Todistettiin luennolla, todistus lisätään myöhemmin. □

Yhdistämällä nämä tiedot Möbius-kuvauksen keskittäjästä aiemmin todistettuihin asioihin saamme seuraavat tulokset:

Lause 15.9. *Kaksi Möbius-kuvausta γ_1 ja γ_2, $\gamma_i \neq \text{id}$, $i = 1, 2$, kommutoi, jos ja vain jos niillä on samat kiintopisteet.*

Lause 15.10.

(1) *Parabolisen Möbius-kuvauksen $\gamma \in \text{Möb}(\mathbb{H})$ keskittäjän muodostavat kaikki ne paraboliset Möbius-kuvaukset, joilla on sama kiintopiste reunalla $\partial\mathbb{H}$ kuin kuvauksella γ.*

(2) *Elliptisen Möbius-kuvauksen $\gamma \in \text{Möb}(\mathbb{H})$ keskittäjän muodostavat kaikki ne elliptiset Möbius-kuvaukset, joilla on sama kiintopiste ylemmässä puolitasossa $\mathbb{H}$ kuin kuvauksella γ.*

(3) *Hyperbolisen Möbius-kuvauksen $\gamma \in \text{Möb}(\mathbb{H})$ keskittäjän muodostavat kaikki ne hyperboliset Möbius-kuvaukset, joilla on samat kaksi kiintopistettä reunalla $\partial\mathbb{H}$ kuin kuvauksella γ.*

Seuraavat kaksi lausetta kertovat, että jos Fuchsin ryhmä on Abelin ryhmä, niin se on syklinen.

Lause 15.11. *Olkoon* Γ *Fuchsin ryhmä. Oletetaan, että jokaisella kuvauksella* $\gamma \in \Gamma \setminus \{\mathrm{id}\}$ *on sama kiintopisteiden joukko. Tällöin* Γ *on syklinen ryhmä.*

Todistus. Koska kaikilla $\gamma \in \Gamma \setminus \{\mathrm{id}\}$ on sama kiintopistejoukko, niiden kaikkien tulee olla samaa tyyppiä: joko ne kaikki ovat parabolisia, ne kaikki ovat hyperbolisia tai ne kaikki ovat elliptisiä.

Oletetaan, että kuvaukset pvat parabolisia. Konjugoimalla Γ voidaan olettaa, että kuvausten ainoa kiintopiste on ∞, jolloin kaikki kuvaukset ovat siirtoja. Siis Γ on siirtoryhmän $\{z \mapsto z + b \mid b \in \mathbb{R}\}$ diskreetti aliryhmä. Koska siirtoryhmä voidaan samastaa ryhmän $\mathbb{R}$ kanssa, seuraa tästä, että Γ on syklinen.

Oletetaan seuraavaksi, että kaikki kuvaukset ovat hyperbolisia. Konjugoimalla Γ voidaan olettaa, että kuvausten kiintopisteet ovat 0 ja ∞, jolloin kaikki kuvaukset ovat venytyksiä. Siis Γ on venytysryhmän $\{z \mapsto kz \mid k > 0\}$ diskreetti aliryhmä. Venytysryhmä voidaan samastaa ryhmän $(\mathbb{R}_+, \cdot)$ kanssa. Eksponenttikuvaus $(\mathbb{R}, +) \to (\mathbb{R}_+, \cdot)$, $x \mapsto e^x$, on sekä ryhmäisomorfismi, että homeomorfismi. Niinpä se vie diskreetit joukot diskreeteille joukoille ja sykliset ryhmät syklisille ryhmille. Tästä seuraa, että Γ on syklinen.

Oletetaan viimein, että kaikki kuvaukset ovat elliptisiä ja todistetaan väite Poincarén kiekon tilanteessa. Konjugaimalla Γ voidaan olettaa, että kuvausten ainoa kiintopiste on origo ja, että kaikki kuvaukset ovat kiertoja. Siis Γ on kiertoryhmän $\{z \mapsto e^{i2\pi\theta} z \mid \theta \in [0, 1)\}$ diskreetti aliryhmä. Koska kiertoryhmä voidaan samastaa ryhmän $\mathbb{S}^1$ kanssa, seuraa tästä, että Γ on äärellinen syklinen ryhmä. □

Lause 15.12. *Olkoon* Γ *Fuchsin ryhmä, joka on myös Abelin ryhmä. Tällöin* Γ *on syklinen ryhmä.*

Todistus. Olkoon Γ Fuchsin ryhmä, joka on myös Abelin ryhmä. Lauseesta 15.9 seuraa, että jokaisella ryhmän Γ neutraalialkiosta poikkeavalla alkiolla on sama kiintopistejoukko. Lauseen 15.11 perusteella Γ on syklinen ryhmä. □

Harjoitustehtävä 15.13. *Olkoon* Γ *ryhmä ja olkoon* H *ryhmän* Γ *aliryhmä. Aliryhmän* H *normalisoija on*

$$N_\Gamma(H) = \{g \in \Gamma \mid gHg^{-1} = H\}.$$

(1) *Tarkista, että* $N_\Gamma(H)$ *on ryhmän* Γ *aliryhmä.*
(2) *Olkoon* $\Gamma \subset \mathrm{Möb}(\mathbb{H})$ *Fuchsin ryhmä, joka ei ole Abelin ryhmä. Osoita, että myös* $N_{\mathrm{Möb}(\mathbb{H})}(\Gamma)$ *on Fuchsin ryhmä.*

16. Perusalueet

Perusalueen määritelmä

Määritelmä 16.1. Olkoon Γ Fuchsin ryhmä. Ryhmän Γ *perusalue* on ylemmän puolitason avoin osajoukko F, joka toteuttaa seuraavat ehdot:

(1) yhdiste $\bigcup_{\gamma \in \Gamma} \gamma(\overline{F}) = \mathbb{H}$,
(2) kaikille $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$, $\gamma_1 \neq \gamma_2$, pätee $\gamma_1(F) \cap \gamma_2(F) = \emptyset$.

Huomautus 16.2. Edellisen määritelmän kohdassa (1) on joukko $\overline{F}$. Olisimme yhtä hyvin voineet kirjoittaa $\overline{\gamma(F)}$, sillä $\gamma(\overline{F}) = \overline{\gamma(F)}$. Joukot ovat samoja, koska kuvaus γ on homeomorfismi. Huomaa, että merkintä $\overline{F}$ tarkoittaa joukon F sulkeumaa ylemmässä puolitasossa, ei siis joukossa $\mathbb{H} \cup \partial\mathbb{H}$.

Niinpä F on ryhmän Γ perusalue, jos jokainen ylemmän puolitason piste kuuluu jonkin kuvan $\gamma(F)$, $\gamma \in \Gamma$, sulkeumaan ja toisaalta eri kuvat eivät koskaan leikkaa toisiaan. Sanomme, että kuvat $\gamma(F)$, $\gamma \in \Gamma$, *laatoittavat* ylemmän puolitason.

Huomautus 16.3. Joskus perusalueet määritellään ylemmän puolitason *suljetuiksi* joukoiksi. Näin tehtäessä korvataan määritelmän 16.1 ehto (1) ehdolla $\bigcup_{\gamma\in\Gamma} \gamma(F) = \mathbb{H}$. Ehto (2) korvataan ehdolla $\gamma_1(\mathrm{int}(F)) \cap \gamma_2(\mathrm{int}(F)) = \emptyset$ kaikilla $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$, $\gamma_1 \neq \gamma_2$, missä $\mathrm{int}(F)$ on joukon F sisäpisteitten joukko.

Esimerkki 16.4. Tarkastellaan ryhmän $\mathrm{Möb}(\mathbb{H})$ aliryhmää $\Gamma = \{\gamma_n \mid \gamma_n(z) = z + n,\ n \in \mathbb{Z}\}$. Ryhmä Γ on Fuchsin ryhmä. Olkoon $F = \{z \in \mathbb{H} \mid 0 < \mathrm{Re}(z) < 1\}$. Tällöin F on ylemmän puolitason avoin osajoukko. Jos $\mathrm{Re}(z) = a$, niin $\mathrm{Re}(\gamma_n(z)) = n + a$. Niinpä

$$\gamma_n(F) = \{z \in \mathbb{H} \mid n < \mathrm{Re}(z) < n + 1\}$$

ja

$$\gamma_n(\mathrm{cl}(F)) = \{z \in \mathbb{H} \mid n \leq \mathrm{Re}(z) \leq n + 1\},$$

joten $\bigcup_{n\in\mathbb{Z}} \gamma_n(\mathrm{cl}(F)) = \mathbb{H}$. On selvää, että jos $\gamma_n(F) \cap \gamma_m(F) \neq \emptyset$, niin $n = m$. Siis F on ryhmän Γ perusalue.

Esimerkki 16.5. Tarkastellaan seuraavaksi ryhmän $\mathrm{Möb}(\mathbb{H})$ aliryhmää $\Gamma = \{\gamma_n \mid \gamma_n(z) = 2^n z,\ n \in \mathbb{Z}\}$. Ryhmä Γ on Fuchsin ryhmä. Olkoon $F = \{z \in \mathbb{H} \mid 1 < |z| < 2\}$. Tällöin F on ylemmän puolitason $\mathbb{H}$ avoin osajoukko. Jos $1 < |z| < 2$, niin $2^n < |\gamma_n(z)| < 2^{n+1}$. Niinpä

$$\gamma_n(F) = \{z \in \mathbb{H} \mid 2^n < |z| < 2^{n+1}\}$$

ja

$$\gamma_n(\mathrm{cl}(F)) = \{z \in \mathbb{H} \mid 2^n \leq |z| \leq 2^{n+1}\},$$

joten $\bigcup_{n\in\mathbb{Z}} \gamma_n(\mathrm{cl}(F)) = \mathbb{H}$. On selvää, että jos $\gamma_n(F) \cap \gamma_m(F) \neq \emptyset$, niin $n = m$. Niinpä F on ryhmän Γ perusalue.

Fuchsin ryhmien perusalueet eivät ole yksikäsitteisiä, eli tietyllä Fuchsin ryhmällä saattaa olla useita eri perusalueita. Seuraavan lauseen perusteella Fuchsin ryhmän kaikilla perusalueilla on sama hyperbolinen pinta-ala.

Lause 16.6. *Olkoot F_1 ja F_2 kaksi Fuchsin ryhmän Γ perusaluetta. Oletetaan, että $A_{\mathbb{H}}(F_1) < \infty$ ja että $A_{\mathbb{H}}(\partial F_1) = A_{\mathbb{H}}(\partial F_2) = 0$. Tällöin $A_{\mathbb{H}}(F_1) = A_{\mathbb{H}}(F_2)$.*

Todistus. Joukon F reuna on määritelmän mukaan joukko $\partial F = \overline{F} \setminus \mathrm{int}(F)$, missä $\overline{F}$ ja $\mathrm{int}(F)$ ovat joukon F sulkeuma ja sisäpisteiden joukko. Oletamme, että $A_{\mathbb{H}}(\partial F_1) = A_{\mathbb{H}}(\partial F_2) = 0$. Tästä oletuksesta seuraa, että $A_{\mathbb{H}}(\overline{F_i}) = A_{\mathbb{H}}(F_i)$, missä $i = 1, 2$. Niinpä

$$\bigcup_{\gamma\in\Gamma} \big(\overline{F_1} \cap \gamma(F_2)\big) = \overline{F_1} \cap \Big(\bigcup_{\gamma\in\Gamma} \gamma(F_2)\Big) \subset \overline{F_1}.$$

Huomaa, että joukkojen $\overline{F_1} \cap \gamma_1(F_2)$ ja $\overline{F_1} \cap \gamma_2(F_2)$ leikkaus on tyhjä kun $\gamma_1 \neq \gamma_2$, koska F_2 on ryhmän Γ perusalue. Koska Möbius-kuvaukset ovat pinta-alan säilyttäviä, pätee

$$\begin{aligned} A_{\mathbb{H}}(\overline{F_1}) &\geq \sum_{\gamma \in \Gamma} A_{\mathbb{H}}\big(\overline{F_1} \cap \gamma(F_2)\big) \\ &= \sum_{\gamma \in \Gamma} A_{\mathbb{H}}\big(\gamma^{-1}(\overline{F_1}) \cap F_2\big) \\ &= \sum_{\gamma \in \Gamma} A_{\mathbb{H}}\big(\gamma(\overline{F_1}) \cap F_2\big). \end{aligned}$$

Koska F_1 on ryhmän Γ perusalue, pätee

$$\bigcup_{\gamma \in \Gamma} \gamma(\overline{F_1}) = \mathbb{H}.$$

. Niinpä

$$\sum_{\gamma \in \Gamma} A_{\mathbb{H}}\big(\gamma(\overline{F_1}) \cap F_2\big) \geq A_{\mathbb{H}}\left(\bigcup_{\gamma \in \Gamma} \gamma(\overline{F_1}) \cap F_2\right) = A_{\mathbb{H}}(F_2).$$

Tästä seuraa, että

$$A_{\mathbb{H}}(F_1) = A_{\mathbb{H}}(\overline{F_1}) \geq A_{\mathbb{H}}(F_2).$$

Vaihtamalla yllä olevassa päättelyssä F_1 ja F_2 keskenään, saadaan $A_{\mathbb{H}}(F_2) \geq A_{\mathbb{H}}(F_1)$. Niinpä $A_{\mathbb{H}}(F_1) = A_{\mathbb{H}}(F_2)$. □

Olkoon Γ Fuchsin ryhmä ja olkoon Γ_1 ryhmän Γ aliryhmä. Myös Γ on Fuchsin ryhmä, sillä Diskreetin ryhmän aliryhmänä se on diskreetti. Olkoon

$$\Gamma/\Gamma_1 = \{\Gamma_1\gamma \mid \gamma \in \Gamma\}$$

aliryhmän Γ_1 oikeitten sivuluokkien joukko. Jos sivuluokkia on yhteensä n kappaletta, eli joukon Γ/Γ_1 mahtavuus on n, kirjoitamme $\#(\Gamma/\Gamma_1) = n$.

Lause 16.7. *Olkoon Γ Fuchsin ryhmä ja olkoon Γ_1 ryhmän Γ aliryhmä. Oletetaan, että $\#(\Gamma/\Gamma_1) = n$. Esitetään Γ sivuluokkien erillisenä yhdisteenä*

$$\Gamma = \Gamma_1\gamma_1 \cup \Gamma_1\gamma_2 \cup \cdots \cup \Gamma_1\gamma_n.$$

Olkoon F ryhmän Γ perusalue. Tällöin

(1) *yhdiste $F_1 = \gamma_1(F) \cup \gamma_2(F) \cup \cdots \cup \gamma_n(F)$ on ryhmän Γ_1 perusalue,*
(2) *jos $A_{\mathbb{H}}(F)$ on äärellinen, niin $A_{\mathbb{H}}(F_1) = nA_{\mathbb{H}}(F)$.*

Todistus. Todistettiin luennolla, todistus lisätään myöhemmin. Todistus on myös Svetlana Katokin kirjassa, Teoreema 3.1.2. □

17. Dirichlet'n monikulmiot: konstruktio

Edellä tutustuimme muutamaan esimerkkiin tiettyjen Fuchsin ryhmien perusalueista. Emme ole vielä osoittaneet, että jokaista Fuchsin ryhmää vastaa jokin perusalue. Perusalueita voidaan konstruoida eri tavoin. Tässä ja seuraavassa luvussa tutustumme perusalueisiin, joista käytetään nimitystä *Dirichlet'n alue.* Konstruoimme perusalueet ylemmässä puolitasossa, samalla tavoin ne voitaisiin konstruoida Poincarén kiekolla.

Määritelmä 17.1. Olkoon C ylemmän puolitason $\mathbb{H}$ geodeesi. Tällöin C jakaa ylemmän puolitason kahteen osaan. Kutsumme näitä osia *ylemmän puolitason puolitasoiksi* tai lyhyemmin *puolitasoiksi.*

Imaginääriakseli jakaa ylemmän puolitason kahteen (avoimeen) puolitasoon: $\{z \in \mathbb{H} \mid \mathrm{Re}(z) > 0\}$ ja $\{z \in \mathbb{H} \mid \mathrm{Re}(z) < 0\}$. Puoliympyrä, jonka keskipiste on origo ja säde on 1, jakaa ylemmän puolitason puolitasoihin $\{z \in \mathbb{H} \mid |z| < 1\}$ ja $\{z \in \mathbb{H} \mid |z| > 1\}$.

Määritelmä 17.2. Äärellisen monen puolitason leikkausta kutsutaan *konveksiksi hyperboliseksi monikulmioksi.*

Huomaa, että yleensä monikulmiot määritellään suljettujen puolitasojen leikkauksina. Tässä luvussa kuitenkin tarvitsemme avoimien puolitasojen leikkauksia, joten on kätevää määritellä monikulmiot avoimiksi. Monikulmiot voidaan määritellä yleisemmin niin, että myös äärettömän monen puolitason leikkauksia sanotaan monikulmioiksi. Jos näin tehdään, niin tarvitaan lisäoletus: Puolitasojen X_α, $\alpha \in A$, leikkaus on hyperbolinen monikulmio, jos kokoelma $\{l_\alpha\}_{\alpha \in A}$ on *lokaalisti äärellinen*, missä l_α on puolitason X_α määrittelevä geodeesi.

Määritelmä 17.3. Olkoon X topologinen avaruus ja olkoon $\{X_\alpha\}_{\alpha \in A}$ kokoelma avaruuden X osajoukkoja. Kokoelmaa $\{X_\alpha\}_{\alpha \in A}$ sanotaan lokaalisti äärelliseksi, jos jokaisella $x \in X$ on sellainen ympäristö U_x, että $U_x \cap X_\alpha \neq \emptyset$ vain äärellisen monella X_α.

Keskinormaali

Olkoot $z_1, z_2 \in \mathbb{H}$. Tällöin on olemassa yksikäsitteinen geodeesi, joka kulkee pisteitten z_1 ja z_2 kautta. Kuten edellä, käytetään geodeesin pisteitten z_1 ja z_2 väliselle osalle merkintää $[z_1, z_2]$. Kutsumme tätä osaa (hyperboliseksi) janaksi. On olemassa yksikäsitteinen geodeesi, joka on kohtisuorassa janaa $[z_1, z_2]$ vastaan ja kulkee sen keskipisteen kautta. Kutsumme tätä geodeesia janan $[z_1, z_2]$ *keskinormaaliksi.*

Lause 17.4. *Olkoot $z_1, z_2 \in \mathbb{H}$. Yhtälön*

$$d_{\mathbb{H}}(z, z_1) = d_{\mathbb{H}}(z, z_2)$$

määrittelemä suora on janan $[z_1, z_2]$ keskinormaali.

Todistus. Kuvaamalla pisteet z_1 ja z_2 imaginääriakselille Möbius-kuvauksella, voimme olettaa, että sekä z_1 että z_2 ovat imaginääriakselilla ja että $z_1 = i$. Kirjoitetaan $z_2 = ir^2$ jollakin $r > 0$. Soveltamalla tarpeen vaatiessa Möbius-kuvausta $z \mapsto -1/z$ pisteisiin z_1 ja z_2 voimme olettaa, että $r > 1$.

Lausetta 5.5 soveltamalla nähdään, että imaginääriakselilla olevan janan $[i, ir^2]$ keskipiste on pisteessä ir. Yksikäsitteinen pisteen ir kautta kulkeva geodeesi, joka on kohtisuorassa imaginääriakselia vastaan, on origokeskeinen, r-säteinen puoliympyrä. Lauseen 5.14 perusteella kaikilla $z, w \in \mathbb{H}$, pätee

$$\cosh d_{\mathbb{H}}(z, w) = 1 + \frac{|z - w|^2}{2\mathrm{Im}(z)\mathrm{Im}(w)}.$$

Olkoon sitten $z \in \mathbb{H}$ ja $d_{\mathbb{H}}(z, z_1) = d_{\mathbb{H}}(z, z_2)$, missä $z_1 = i$ ja $z_2 = r^2 i$. Tällöin

$$|z - i|^2 = \frac{|z - ir^2|^2}{r^2}.$$

Sieventämällä edellinen yhtälö saadaan $|z| = r$, joten z on janan $[z_1, z_2]$ keskinormaalilla. □

Harjoitustehtävä 17.5.

(1) *Olkoot* $z_1 = x_1 + iy_1$*,* $z_2 = x_2 + iy_2$*,* $z_1, z_2 \in \mathbb{H}$*. Osoita, että janan* $[z_1, z_2]$ *keskinormaali on*

$$\{z \in \mathbb{H} \mid y_2|z - z_1|^2 = y_1|z - z_2|^2\}.$$

(2) *Kuvaile kohdan* (1) *avulla pisteitten* $1 + 2i$ *ja* $(6 + 8i)/5$ *kautta kulkevan geodeesin keskinormaali.*

Dirichlet'n alueitten konstruointi

Lemma 17.6. *Olkoon* Γ *Fuchsin ryhmä. Tällöin on olemassa* $p \in \mathbb{H}$*, joka ei ole ryhmän* Γ *minkään epätriviaalin alkion kiintopiste. (Toisin sanoen* $\gamma(p) \neq p$ *kaikilla* $g \in \Gamma \setminus \{\mathrm{id}\}$*.)*

Todistus. Väite seuraa suoraan Lauseesta 14.13. □

Olkoon Γ Fuchsin ryhmä ja olkoon $p \in \mathbb{H}$ piste, jolle $\gamma(p) \neq p$ kaikilla $\gamma \in \Gamma \setminus \{\mathrm{id}\}$. Olkoon $\gamma \in \Gamma \setminus \{\mathrm{id}\}$. Joukko

$$\{z \in \mathbb{H} \mid d_{\mathbb{H}}(z, p) < d_{\mathbb{H}}(z, \gamma(p))\}$$

on kaikkien niiden ylemmän puolitason pisteiden joukko, jotka ovat lähempänä pistettä p kuin pistettä $\gamma(p)$.

Ryhmän Γ *Dirichlet'n alue* on

$$D(p) = \{z \in \mathbb{H} \mid d_{\mathbb{H}}(z, p) < d_{\mathbb{H}}(z, \gamma(p)) \text{ kaikilla } \gamma \in \Gamma \setminus \{\mathrm{id}\}\}.$$

Dirichlet'n alue siis on joukko, jonka pisteet ovat lähempänä pistettä p kuin mitään muuta radan

$$\Gamma(p) = \{\gamma(p) \mid \gamma \in \Gamma\}$$

pistettä.

Dirichlet'n alue voidaan konstruoida seuraavasti:

(1) Valitse sellainen ylemmän puolitason piste p, että $\gamma(p) \neq p$ kaikilla $\gamma \in \Gamma \setminus \{\mathrm{id}\}$.
(2) Konstruoi hyperbolinen jana $[p, \gamma(p)]$ kaikilla $\gamma \in \Gamma \setminus \{\mathrm{id}\}$.
(3) Olkoon $L_p(\gamma)$ janan $[p, \gamma(p)]$ keskinormaali
(4) Olkoon $H_p(\gamma)$ keskinormaalin $L_p(\gamma)$ määrittelemä puolitaso, joka sisältää pisteen p. Lauseen **??** perusteella $H_p(\gamma)$ on ylemmän puolitason niiden pisteiden joukko, jotka ovat lähempänä pistettä p kuin pistettä $\gamma(p)$.
(5) Tällöin

$$D(p) = \bigcap_{\gamma \in \Gamma \setminus \{\mathrm{id}\}} H_p(\gamma).$$

Huomaa, että $p \in H_p(\gamma)$ kaikilla γ, joten $D(p)$ on epätyhjä ja yhtenäinen. Osoitamme, että $D(p)$ on ryhmän Γ perusalue. Ensin todistamme seuraavan lemman.

Lemma 17.7. *Olkoon Γ Fuchsin ryhmä ja olkoon p sellainen ylemmän puolitason piste, että $\gamma(p) \neq p$ kaikilla $\gamma \in \Gamma \setminus \{\mathrm{id}\}$. Tällöin kokoelma*

$$L = \{L_p(\gamma) \mid \gamma \in \Gamma \setminus \{\mathrm{id}\}\}$$

on lokaalisti äärellinen.

Todistus. Jos Γ on äärellinen, niin L on äärellinen, joten se on lokaalisti äärellinen.

Oletetaan sitten, että Γ on ääretön. Harjoitustehtävän perusteella Γ on numeroituva. Kirjoitetaan

$$\Gamma = \{\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \ldots\}.$$

Olkoon $x \in \mathbb{H}$. Olkoon $r > 0$ niin suuri, että

$$x \in B_r(p) = \{z \in \mathbb{H} \mid d_{\mathbb{H}}(z,p) < r\}.$$

Koska pisteen p rata $\Gamma(p)$ on ääretön, suljettu, diskreetti joukko, pätee

$$d_{\mathbb{H}}(p, L_p(\gamma_n)) = \frac{1}{2} d_{\mathbb{H}}(p, \gamma_n(p)) \to \infty,$$

kun $n \to \infty$. Siis $d_{\mathbb{H}}(p, \gamma_n(p)) \leq r$ vain äärellisen monella n, joten $B_r(p) \cap L_p(\gamma_n) \neq \emptyset$ vain äärellisen monella n. Koska x on ylemmän puolitason mielivaltainen piste ja koska $B_r(p)$ on pisteen x ympäristö, seuraa tästä, että L on lokaalisti äärellinen. $\square$

Teoreema 17.8. *Olkoon Γ Fuchsin ryhmä ja olkoon p sellainen ylemmän puolitason piste, että $\gamma(p) \neq p$ kaikilla $\gamma \in \Gamma \setminus \{\mathrm{id}\}$. Tällöin $D(p)$ on ryhmän Γ perusalue ja $A_{\mathbb{H}}(\partial D(p)) = 0$.*

Todistus. Olkoon $z \in \overline{D(p)}$. Koska kokoelma

$$L = \{L_p(\gamma) \mid \gamma \in \Gamma \setminus \{\mathrm{id}\}\}$$

on lokaalisti äärellinen, pisteellä z sellainen ympäristö U, että $U \cap L_p(\gamma) \neq \emptyset$ vain äärellisen monella γ. Olkoot tällaiset kuvaukset $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$. Jos $z \in D(p)$, niin

$$z \in \Big(\bigcap_{i=1}^{n} H_p(\gamma_n)\Big) \cap U \subset D(p).$$

Siis pisteellä z on ympäristö, joka sisältyy joukkoon $D(p)$, mistá seuraa, että $D(p)$ on ylemmän puolitason avoin osajoukko.

Jos

$$z \in \partial D(p) = \overline{D(p)} \setminus D(p),$$

niin $z \in \cup_{i=1}^{n} L_p(\gamma_n)$. Siis

$$\partial D(p) \subset \bigcup_{\gamma \in \Gamma \setminus \{\mathrm{id}\}} L_p(\gamma).$$

Koska $A_{\mathbb{H}}(L_p(\gamma)) = 0$ kaikilla $\gamma \in \Gamma$, seuraa tästä, että $A_{\mathbb{H}}(\partial D(p)) = 0$.

Osoitetaan sitten, että $D(p) \cap \gamma_0(D(p)) = \emptyset$ kaikilla $\gamma_0 \in \Gamma \setminus \{\mathrm{id}\}$. Tehdään vastaoletus ja oletetaan, että on olemassa $z \in D(p) \cap \gamma_0(D(p))$. Tällöin $z \in D(p)$ ja $\gamma_0^{-1}(z) \in D(p)$. Siis

$$d_{\mathbb{H}}(z,p) < d_{\mathbb{H}}(z,\gamma(p)) \ \text{ kaikilla } \ \gamma \in \Gamma \setminus \{\mathrm{id}\} \qquad (**)$$

ja

$$d_{\mathbb{H}}(\gamma_0^{-1}(z),p) < d_{\mathbb{H}}(\gamma_0^{-1}(z),\gamma(p)) \ \text{ kaikilla } \ \gamma \in \Gamma \setminus \{\mathrm{id}\}. \qquad (*)$$

Koska γ_0 on isometria, epäyhtälö $(*)$ on yhtäpitävä epäyhtälön

$$d_{\mathbb{H}}(z,\gamma_0(p)) < d_{\mathbb{H}}(z,\gamma_0\gamma(p)) \ \text{ kaikilla } \ \gamma \in \Gamma \setminus \{\mathrm{id}\}$$

kanssa. Kun valitaan $\gamma = \gamma_0^{-1}$, saadaan

$$d_{\mathbb{H}}(z,\gamma_0(p)) < d_{\mathbb{H}}(z,p),$$

mikä johtaa ristiriitaan epäyhtälön $(**)$ kanssa. Siis vastaoletus on väärä ja $D(p) \cap \gamma_0(D(p)) = \emptyset$.

Todistetaan vielä, että

$$\bigcup_{\gamma \in \Gamma} \gamma(\overline{D(p)}) = \mathbb{H}.$$

Olkoon $z \in \mathbb{H}$. Valitaan sellainen radan $\Gamma(z)$ piste z^*, että

$$d_{\mathbb{H}}(z^*,p) \le d_{\mathbb{H}}(\gamma(z),p)$$

kaikilla $\gamma \in \Gamma$. Niinpä, jos $\gamma'(z) \in D(p)$ jollakin $\gamma' \in \Gamma$, valitaan $z^* = \gamma'(z)$. Olkoon F pisteitten z^* muodostama joukko. Koska F sisältää pisteen jokaiselta radalta, on

$$\Gamma(F) = \{\gamma(z) \mid z \in F, \gamma \in \Gamma\} = \mathbb{H}.$$

Jos nyt $F \subset \overline{D(p)}$, niin tällöin

$$\Gamma(\overline{D(p)}) = \mathbb{H}.$$

Olkoon $z \in F$ ja olkoon $\gamma \in \Gamma \setminus \{\mathrm{id}\}$. Selvästi $p \notin L_p(\gamma)$. Oletetaan, että

$$L_p(\gamma) \cap (p,z) \neq \emptyset.$$

Tällöin

$$d_{\mathbb{H}}(z,p > d_{\mathbb{H}}(z,\gamma(p)) = d_{\mathbb{H}}(\gamma^{-1}(z),p),$$

mikä on mahdotonta, koska $z \in F$. Siis $L_p(\gamma) \cap (p,z) = \emptyset$, joten $(p,z) \subset D(p)$, mistä seuraa, että $z \in \overline{D(p)}$. Siis $F \subset \overline{D(p)}$. □

Lemma 17.9. *Olkoon Γ Fuchsin ryhmä ja olkoon p sellainen ylemmän puolitason piste, että $\gamma(p) \neq p$ kaikilla $\gamma \in \Gamma \setminus \{\mathrm{id}\}$. Tällöin kokoelma*

$$\{\gamma(\overline{D(p)}) \mid \gamma \in \Gamma\}$$

on lokaalisti äärellinen.

Todistus. Harjoitustehtävä. □

Huomautus 17.10. Jos Dirichlet'n alueella $D(p)$ on äärellisen monta sivua, käytämme siitä nimitystä *Dirichlet'n monikulmio*. Huomaa, että osa sivuista saattaa ola reunalla $\partial\mathbb{H}$. Dirichlet'n monikulmio riippuu pisteen p valinnasta. Eri pisteen p valinta tuottaa eri monikulmion $D(p)$, jolla voi olla eri ominaisuuksia, esim. eri määrä sivuja. Fuchsin ryhmää sanotaan *geometrisesti äärelliseksi*, jos sillä on Dirichlet'n alue, joka on konveksi, äärellisen monta sivua omaava hyperbolinen monikulmio.

18. Dirichlet'n monikulmiot: esimerkkejä

Kokonaislukusiirrot

Lause 18.1. *Olkoon Γ Fuchsin ryhmä $\{\gamma_n \mid \gamma_n(z) = z + n,\ \ n \in \mathbb{Z}\}$. Tällöin*

$$D(i) = \{z \in \mathbb{H} \mid -1/2 < \mathrm{Re}(z) < 1/2\}.$$

Todistus. Olkoon $p = i$. Tällöin $\gamma_n(p) = i + n \neq p$ kaikilla $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Janan $[p, \gamma_n(p)] = [i, i + n]$ keskinormaali on pystysuora puolisuora, jonka reaaliosa on $n/2$. Niinpä

$$H_i(\gamma_n) = \begin{cases} \{z \in \mathbb{H} \mid \mathrm{Re}(z) < n/2\}, & \text{jos} \quad n > 0, \\ \{z \in \mathbb{H} \mid \mathrm{Re}(z) > n/2\}, & \text{jos} \quad n < 0, \end{cases}$$

joten

$$\begin{aligned} D(i) &= \bigcap_{\gamma \in \Gamma \setminus \{\mathrm{Id}\}} H_i(\gamma) \\ &= H_i(\gamma_1) \cap H_i(\gamma_{-1}) \\ &= \{z \in \mathbb{H} \mid -1/2 < \mathrm{Re}(z) < 1/2\}. \end{aligned}$$

□

Kiertoryhmät

Lause 18.2. *Olkoon $n > 0$. Olkoon*

$$\Gamma = \{\gamma_k \mid \gamma_k(z) = e^{2\pi i k/n} z, k = 0, 1, \ldots, n-1\}.$$

Tällöin Γ on Fuchsin ryhmä. Olkoon $p = 1/2$. Tällöin

$$D(p) = \{z \in \mathbb{D} \mid -\pi/n < \arg(z) < \pi/n\}.$$

Todistus. Kuvauksen γ_n, $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, ainoa kiintopiste on origo. Niinpä voimme valita pisteeksi p minkä tahansa pisteen $p \in \mathbb{D} \setminus \{0\}$. Valitaan $p = 1/2$. Tällöin $\gamma_k(p) = (e^{2\pi i k/n})/2$. Jana $[p, \gamma_k(p)]$ on osa ympyrän kaarta (ympyrä kulkee pisteitten p ja $\gamma_k(p)$ kautta ja on kohtisuorassa reunaa $\partial\mathbb{D}$ vastaan). Janan $[p, \gamma_k(p)]$ keskinormaali $L_p(\gamma_k)$ on kiekon $\mathbb{D}$ lävistäjä, joka muodostaa positiivisen reaaliakselin kanssa kulman $(2\pi k/n)/2 = \pi k/n$. Niinpä $H_p(\gamma_k)$ on kiekon $\mathbb{D}$ puolisko, joka sisältää pisteen p ja jota rajoittaa lävistäjä $L_p(\gamma_k)$. Ottamalla joukkojen $H_p(\gamma_k)$ leikkaukset, nähdään, että

$$D(p) = \{z \in \mathbb{D} \mid -\pi/n < \arg(z) < \pi/n\}.$$

□

Modulaariryhmä

Lause 18.3. *Modulaariryhmän* $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{Z})$ *Dirichlet'n monikulmio on*

$$D(p) = \{z \in \mathbb{H} \mid |z| > 1, -1/2 < \mathrm{Re}(z) < 1/2\},$$

missä $p = ki$, $k > 1$.

Todistus. On helppo tarkistaa, että jos $p = ik$, missä $k > 1$, niin identiteettikuvaus on ainoa ainoa ryhmän $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{Z})$ alkio, jonka kiintopiste p voi olla.

Tarkastellaan ylemmän puolitason $\mathbb{H}$ Möbius-kuvauksia $\gamma_1(z) = z+1$ ja $\gamma_2(z) = -1/z$. Molemmat ovat ryhmän $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{Z})$ alkioita. Janan $[p, \gamma_1(p)] = [p, p+1]$ keskinormaali on suora $\mathrm{Re}(z) = 1/2$, joten $H_p(\gamma_1) = \{z \in \mathbb{H} \mid \mathrm{Re}(z) < 1/2\}$.

Pisteitten $p = ki$ ja $\gamma_2(p) = -1/ki$ välinen jana $[p, \gamma_2(p)]$ on pisteitten p ja $\gamma_2(p)$ välissä oleva imaginääriakselin osa. Janan $[p, \gamma_2(p)]$ keskinormaali on ylemmän puolitason puoliympyrä, jonka keskipiste on origo ja säde 1. Niinpä $H_p(\gamma_2) = \{z \in \mathbb{H} \mid |z| > 1\}$.

Olkoon

$$F = H_p(\gamma_1) \cap H_p(\gamma_1^{-1}) \cap H_p(\gamma_2).$$

Tällöin

$$D(p) = \bigcap_{\gamma \in \mathrm{PSL}(2,\mathbb{Z})} H_p(\gamma) \subset \bigcap_{\gamma = \gamma_1, \gamma_1^{-1}, \gamma_2} H_p(\gamma) = F.$$

Riittää osoittaa, että $F \subset D(p)$.

Tehdään vastaoletus, eli oletetaan, että $D(p) \subset F$, mutta $D(p) \neq F$. Koska $D(p)$ on perusalue, seuraa tästä, että on olemassa piste $z_0 \in D(p) \subset F$ ja kuvaus $\gamma \in \mathrm{PSL}(2,\mathbb{Z}) \setminus \{\mathrm{Id}\}$, joille $\gamma(z_0) \in F$. Osoitamme, että tämä on mahdotonta. Kirjoitetaan

$$\gamma(z) = \frac{az+b}{cz+d},$$

missä $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ ja $ad - bc = 1$. Tällöin

$$|cz_0 + d|^2 = c^2|z_0|^2 + 2\mathrm{Re}(z_0)cd + d^2 > c^2 + d^2 - |cd| = (|c| - |d|)^2 + |cd|,$$

koska $|z_0| > 1$ ja $\mathrm{Re}(z_0) > -1/2$. Koska $ad - bc = 1$ eivät c ja d voi molemmat olla nollia. Niinpä

$$(|c| - |d|)^2 + |cd|$$

on positiivinen kokonaisluku, joten $|cz_0 + d|^2 > 1$. Tästä seuraa, että

$$\mathrm{Im}(\gamma(z_0)) = \frac{\mathrm{Im}(z_0)}{|cz_0 + d|^2} < \mathrm{Im}(z_0).$$

Korvaamalla piste z_0 pisteellä $\gamma(z_0)$ ja kuvaus γ kuvauksella γ^{-1} ja toistamalla edellä oleva päättely, huomataan, että $\mathrm{Im}(z_0) < \mathrm{Im}(\gamma(z_0))$. Päädyimme ristiriitaan, joten vastaoletus on väärä.

□

Harjoitustehtävä 18.4. *Ryhmä* $\Gamma = \{\gamma_n \mid \gamma_n(z) = 2^n z,\ n \in \mathbb{Z}\}$ *on Fuchsin ryhmä. Valitse sopiva* $p \in \mathbb{H}$ *ja konstruoi Dirichlet'n monikolmio* $D(p)$.

19. Fuchsin ryhmän virittäjistä

Tässä luvussa tarkastelemme Fuchsin ryhmien virittäjiä. Fuchsin ryhmien virittäjiä käsitellään sekä S. Katokin kirjassa, että A. Beardonin kirjassa ”The Geometry of Discrete Groups”.

Määritelmä 19.1. Olkoon Γ ryhmä. Sanomme, että joukko $S = \{\gamma_1, \dots, \gamma_n\} \subset \Gamma$ *virittää* ryhmän Γ, jos jokainen ryhmän Γ alkio voidaan esittää tulona joukon S alkioista ja alkioitten käänteisalkioista. Tällöin kirjoitamme $\Gamma = \langle S \rangle$.

Esimerkki 19.2.

(1) Kokonaislukujen ryhmän $\mathbb{Z}$ virittää alkio 1: Jokainen positiivinen kokonaisluku n voidaan kirjoittaa muodossa $1 + \cdots + 1$ (n kertaa). Jokainen negatiivinen kokonaisluku $-n$, $n > 0$, voidaan kirjoittaa muodossa $(-1) + \cdots + (-1)$ (n kertaa).

(2) Ryhmän $\mathbb{Z}^2 = \{(n, m) \mid n, m \in \mathbb{Z}\}$ (laskutoimituksena yhteenlasku) virittää joukko $\{(1, 0), (0, 1)\}$.

(3) Olkoon $p \in \mathbb{Z}$, $p > 0$. Olkoon $\omega = e^{2\pi i/p}$, eli ω on ykkösen p:s juuri. Juuri ω virittää ryhmän $\{1, \omega, \omega^2, \dots, \omega^{p-1}\}$, jonka laskuoimitus on kertolasku.

Huomautus 19.3. Ryhmällä voi olla useita eri virittäjäjoukkkoja. Esimerkiksi joukko $\{2, 3\}$ virittää ryhmän $\mathbb{Z}$.

Lause 19.4. *Olkoon Γ Fuchsin ryhmä ja olkoon D ryhmän Γ perusalue. Oletetaan, että kokoelma*

$$A = \{\gamma(\overline{D}) \mid \gamma \in \Gamma\}$$

on lokaalisti äärellinen. Tällöin joukko

$$\Gamma_0 = \{\gamma \in \Gamma \mid \gamma(\overline{D}) \cap \overline{D} \neq \emptyset\}$$

virittää ryhmän Γ.

Todistus. Olkoon Γ_1 joukon Γ_0 virittämä aliryhmä. Osoitetaan, että $\Gamma_1 = \Gamma$. Koska $\Gamma_1 \subset \Gamma$, riittää osoittaa, että $\Gamma \subset \Gamma_1$.

Olkoon $z \in \mathbb{H}$. Koska D on ryhmän Γ perusalue, pätee

$$\mathbb{H} = \bigcup_{\gamma \in \Gamma} \gamma(\overline{D}).$$

Siis on olemassa $\gamma \in \Gamma$, jolle $\gamma(z) \in \overline{D}$. Olkoon $\gamma' \in \Gamma$. Oletetaan, että myös $\gamma'(z) \in \overline{D}$. Tällöin

$$\gamma'(z) \in \overline{D} \cap \gamma'\gamma^{-1}(\overline{D}).$$

Siis $\gamma'\gamma^{-1} \in \Gamma_0$, joten $\Gamma_1\gamma' = \Gamma_1\gamma$. Niinpä on olemassa hyvin määritelty kuvaus

$$\phi\colon \mathbb{H} \to \Gamma_1\backslash\Gamma, \ \ z \mapsto \Gamma_1\gamma,$$

missä $\gamma(z) \in \overline{D}$.

Olkoon $z \in \mathbb{H}$. Koska A on lokaalisti äärellinen ja koska

$$\mathbb{H} = \bigcup_{\gamma \in \Gamma} \gamma(\overline{D}),$$

on olemassa äärellisen monta kuvaa $\gamma_1(\overline{D}), \dots, \gamma_m(\overline{D})$, joille pätee:

(1) $z \in \gamma_1(\overline{D}) \cap \ldots \cap \gamma_m(\overline{D})$,
(2) pisteellä z on sellainen ympäristö U, että $U \subset \gamma_1(\overline{D}) \cup \ldots \cup \gamma_m(\overline{D})$.

Olkoon $w \in U$. Tällöin $w \in \gamma_i(\overline{D})$ jollakin $i \in \{1, \ldots, m\}$, joten $\gamma_i^{-1}(w) \in \overline{D}$. Siis

$$\phi(w) = \Gamma_1 \gamma_i^{-1} = \phi(z).$$

Siis pisteellä z on avoin ympäristö U, jolle rajoittuma $\phi|U$ on vakio. Koska $\mathbb{H}$ on yhtenäinen, seuraa tästä, että ϕ on vakiokuvaus $\mathbb{H} \to \Gamma_1 \backslash \Gamma$.

Olkoon sitten $\gamma \in \Gamma$, $z \in \overline{D}$ ja $w \in \gamma^{-1}(\overline{D})$. Koska ϕ on vakiokuvaus, pätee

$$\Gamma_1 = \phi(z) = \phi(w) = \Gamma_1 \gamma.$$

Siis $\gamma \in \Gamma_1$. Niinpä $\Gamma \subset \Gamma_1$, joten $\Gamma = \Gamma_1$ ja Γ_0 virittää ryhmän Γ. □

Olkoon Γ Fuchsin ryhmä. Olkoon $P \subset \mathbb{H}$. Oletetaan, että:

(1) P on avoin ja konveksi (siis erityisesti yhtenäinen),
(2) $\cup_{\gamma \in \Gamma} \gamma(\overline{P}) = \mathbb{H}$,
(3) kaikille $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$, $\gamma_1 \neq \gamma_2$, pätee $\gamma_1(P) \cap \gamma_2(P) = \emptyset$,
(4) kokoelma $\{\gamma(\overline{P}) \mid \gamma \in \Gamma\}$ on lokaalisti äärellinen,
(5) $A_{\mathbb{H}}(\partial P) = 0$.

Siis P on ryhmän Γ konveksi perusalue. Ehdon (4) toteuttavaa perusaluetta sanotaan *lokaalisti äärelliseksi*. Erityisesti P voi olla ryhmän Γ Dirichlet'n alue.

Olkoon $z \in \mathbb{H}$. Koska P on lokaalisti äärellinen, pisteellä z on hyperbolinen kiekkoympäristö U ja ryhmässä Γ on äärellisen monta eri alkiota $\gamma_1, \ldots, \gamma_t$, joille pätee

(1) $z \in \gamma_1(\overline{P}) \cap \ldots \cap \gamma_t(\overline{P})$,
(2) $U \subset \gamma_1(\overline{P}) \cup \ldots \cup \gamma_t(\overline{P})$,
(3) jos $\gamma \in \Gamma$ ja $\gamma(\overline{P}) \cap U \neq \emptyset$, niin $\gamma \in \{\gamma_1, \ldots, \gamma_t\}$.

Oletetaan, että $z \in \partial P$. Tällöin voidaan valita $\gamma_1 = \mathrm{id}$ ja täytyy olla $t \geq 2$. Siis jokaista $z \in \partial P$ kohti on olemassa sellainen $\gamma \in \Gamma \setminus \{\mathrm{id}\}$, että $\gamma(z) \in \partial P$.

Olkoon $\gamma \in \Gamma \backslash \{\mathrm{id}\}$. Koska P on konveksi, on myös $\overline{P}$ konveksi, joten myös $\gamma(\overline{P})$ on konveksi. Siis leikkaus $\overline{P} \cap \gamma(\overline{P})$ on konveksi. Koska $\overline{P} \cap \gamma(\overline{P}) \subset \partial P$, on $A_{\mathbb{H}}(\overline{P} \cap \gamma(\overline{P})) = 0$. Olkoot sitten $a, b, c \in \overline{P} \cap \gamma(\overline{P})$. Tällöin pisteitten a, b ja c täytyy olla samalla geodeesilla: Muutoin hyperbolinen kolmio, jonka kärjet ovat a, b ja c, sisältyisi joukkoon ∂P. Tämä on mahdotonta, koska kolmion hyperbolinen pinta-ala on positiivinen, mutta $A_{\mathbb{H}}(\partial P) = 0$. Siis leikkaus $\overline{P} \cap \gamma(\overline{P})$ on hyperbolinen jana (mahdollisesti sen pituus on ääretön tai nolla).

Määritelmä 19.5. Muotoa $\overline{P} \cap \gamma(\overline{P})$ olevaa hyperbolista janaa, jonka pituus > 0, sanotaan P:n *sivuksi*. Pistettä, joka voidaan kirjoittaa muodossa $\overline{P} \cap \gamma_1(\overline{P}) \cap \gamma_2(\overline{P})$, missä $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma \setminus \{\mathrm{id}\}$, $\gamma_1 \neq \gamma_2$, sanotaan P:n *kärjeksi*.

Koska Γ on numeroituva ja P on lokaalisti äärellinen perusalue, pätee:

(1) P:llä on vain numeroituva määrä sivuja ja kärkiä,
(2) P:n sivujen joukko on lokaalisti äärellinen,
(3) P:n kärkien joukko on lokaalisti äärellinen,
(4) reuna ∂P on P:n sivujen yhdiste,

(5) jokainen P:n sivu kuuluu täsmälleen kahteen P:n sivuun ja on kummankin sivun päätepiste,
(6) jos kahden sivun leikkaus on epätyhjä, niin niiden leikkausjoukko on kärkipiste, joka on kummankin sivun päätepiste.

Olkoon

$$\Gamma_* = \{\gamma \in \Gamma \mid \gamma(\overline{P}) \cap \overline{P} \text{ on } P:\text{n sivu}\}$$

ja olkoon S P:n sivujen joukko. Olkoon

$$\varphi\colon \Gamma_* \to S, \ \ \gamma \mapsto \gamma(\overline{P}) \cap \overline{P}.$$

Sivun määritelmän perusteella φ on surjektio. Kohdan (6) avulla voidaan osoittaa, että φ on myös injektio. Siis φ on bijektio. Niinpä jokaista P:n sivua s vastaa yksikäsitteinen joukon Γ_* alkio γ_s, jolle

$$s = \gamma_s(\overline{P}) \cap \overline{P}.$$

Tällöin

$$\gamma_s^{-1}(s) = \gamma_s^{-1}(\overline{P}) \cap \overline{P} = s'.$$

Jos siis $s' = \gamma_s^{-1}(s)$, niin tällöin

$$\gamma_{s'} = \gamma_s^{-1}.$$

Siis saamme kuvauksen

$$\theta\colon S \to S, \ \ s \mapsto \gamma_s^{-1}(s) = s',$$

jolle

$$\theta(\theta(s)) = s.$$

Kuvauksia γ_s sanotaan P:n *sivuja yhdistäviksi kuvauksiksi.*

Lause 19.6. *Olkoon* Γ *Fuchsin ryhmä ja olkoon* P *ryhmän* Γ *konveksi, lokaalisti äärellinen perusalue. Tällöin* P*:n sivuja yhdistävät kuvaukset virittävät ryhmän* Γ*.*

Todistus. Olkoon

$$\Gamma_* = \{\gamma \in \Gamma \mid \gamma(\overline{P}) \cap \overline{P} \text{ on } P:\text{n sivu}\}$$

ja olkoon

$$\Gamma_0 = \{\gamma \in \Gamma \mid \gamma(\overline{P}) \cap \overline{P} \neq \emptyset\}.$$

Aiemmin osoitettiin, että Γ_0 virittää ryhmän Γ. Nyt riittää osoittaa, että jos $\gamma(\overline{P}) \cap \overline{P} \neq \emptyset$, niin γ kuuluu joukon Γ_* virittämään aliryhmään.

Olkoon siis $\gamma \in \Gamma \setminus \{\mathrm{id}\}$, $\gamma(\overline{P}) \cap \overline{P} \neq \emptyset$. Olkoon $w \in \overline{P} \cap \gamma(\overline{P})$. Tällöin on olemassa pisteen w ympäristö U ja alkiot $\gamma_0 = \mathrm{id}, \gamma_1, \ldots, \gamma_t \in \Gamma$, missä $\gamma \in \{\gamma_1, \ldots, \gamma_t\}$ ja

(1) $w \in \gamma_0(\overline{P}) \cap \ldots \cap \gamma_t(\overline{P})$,
(2) $U \subset \gamma_0(\overline{P}) \cup \ldots \cup \gamma_t(\overline{P})$.

Kun U valitaan riittävän pieneksi, voidaan olettaa, että U ei sisällä minkään kuvan $\gamma_j(\overline{P})$ kärkiä (paitsi pisteen w, jos w sattuu olemaan kärki) eikä muita sivuja kuin ne, jotka sisältävät pisteen w. Niinpä P:n reuna joukossa U koostuu joko yhdestä sivusta, joka sisältää pisteen w tai kahdesta sivusta, joiden kummankin kärki w on. Sama pätee kaikille kuville $\gamma_j(P)$, $j \in \{1, \ldots, t\}$.

Järjestelemällä kuvaukset $\gamma_1, \ldots, \gamma_t$ tarpeen vaatiessa uudestaan, voidaan olettaa, että listan

$$\gamma_0(P) = P, \gamma_1(P), \ldots, \gamma_t(P)$$

peräkkäisillä monikulmioilla on yhteinen sivu. Siis

$$\overline{P} \cap \gamma_j^{-1}\gamma_{j+1}(\overline{P}) = \gamma_j^{-1}(\gamma_j(\overline{P}) \cap \gamma_{j+1}(\overline{P}))$$

on hyperbolinen jana, jonka pituus on > 0. Siis $\overline{P} \cap \gamma_j^{-1}\gamma_{j+1}(\overline{P}) = \gamma_j^{-1}(\gamma_j(\overline{P}) \cap \gamma_{j+1}(\overline{P}))$ on $\overline{P}$:n sivu, joten kaikilla j, $\gamma_j^{-1}\gamma_{j+1} = \gamma_s$, jollakin $\gamma_s \in \Gamma_*$. Niinpä $\gamma_1 = \gamma_0\gamma_s = \gamma_s \in \Gamma_*$, jollakin $\gamma_s \in \Gamma_*$. Induktiolla voidaan osoittaa, että jokainen kuvaus γ_j on yhdiste sivuja yhdistävistä kuvauksista. Siis $\gamma_j \in < \Gamma_* >$, kaikilla j. $\square$

20. Sivuja yhdistävät kuvaukset

Olkoon Γ Fuchsin ryhmä ja olkoon $D(p)$ ryhmän Γ Dirichlet'n monikulmio. Oletamme, että monikulmiolla $D(p)$ on ainoastaan äärellisen monta sivua. Olkoon s monikulmion $D(p)$ sivu. Oletetaan, että jollakin $\gamma \in \Gamma \setminus \{\mathrm{Id}\}$ myös $\gamma(s)$ on monikulmion $D(p)$ sivu. Huomaa, että kuvaus γ^{-1} kuvaa sivun $\gamma(s)$ takaisin sivulle s.

Määritelmä 20.1. Yllä olevassa tilanteessa sanomme, että kuvaus γ *yhdistää* sivut s ja $\gamma(s)$, tai lyhyemmin, että sivut s ja $\gamma(s)$ on *yhdistetty*.

On mahdollista, että $s = \gamma(s)$ jollakin sivulla s. Jos v_0 ja v_1 ovat sivun päätepisteet, niin tällöin $\gamma_s(v_0) = v_1$ ja $\gamma_s(v_1) = v_0$.

Esimerkkejä sivut yhdistävistä kuvauksista

Esimerkki 20.2. Olkoon $\Gamma = \{\gamma_n \mid \gamma_n(z) = z + n,\ n \in \mathbb{Z}\}$ kokonaislukusiirtojen muodostama Fuchsin ryhmä. Aiemmin osoitimme, että valitsemalla $p = i$, saadaan ryhmän Γ Dirichlet'n monikulmioksi

$$D(p) = \{z \in \mathbb{H} \mid -1/2 < \mathrm{Re}(z) < 1/2\}.$$

Olkoon $s = \{z \in \mathbb{H} \mid \mathrm{Re}(z) = -1/2\}$. Tällöin s on monikulmion $D(p)$ sivu. Itse asiassa s on janan $[p, p-1] = [p, g(p)]$ keskinormaali. Niinpä pitää olla $\gamma_s(z) = g^{-1}(z) = z+1$, joten γ_s kuvaa sivun s sivulle $s' = \{z \in \mathbb{H} \mid \mathrm{Re}(z) = 1/2\}$.

Esimerkki 20.3. Tarkastellaan seuraavaksi modulaariryhmää $\Gamma = \mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z})$. Olkoon $p = ki$, missä $k > 1$. Aiemmin osoitimme, että ryhmän Γ Dirichlet'n monikulmio on

$$D(p) = \{z \in \mathbb{H} \mid -1/2 < \mathrm{Re}(z) < 1/2,\ |z| > 1\}.$$

Monikulmion $D(p)$ sivut ovat

(1) $s_1 = \{z \in \mathbb{H} \mid \mathrm{Re}(z) = -1/2,\ |z| > 1\}$
(2) $s_2 = \{z \in \mathbb{H} \mid \mathrm{Re}(z) = 1/2,\ |z| > 1\}$
(3) $s_3 = \{z \in \mathbb{H} \mid |z| = 1,\ -1/2 < \mathrm{Re}(z) < 1/2\}$.

Selvästi $\gamma_{s_1}(z) = z + 1$, joten γ_{s_1} yhdistää sivut s_1 ja s_2. Vastaavasti $\gamma_{s_2}(z) = z - 1$. Tarkastellaan vielä sivua s_3. Tämä sivu on janan $[p, -1/p] = [p, \gamma_{s_3}^{-1}(p)]$ keskinormaali, missä $\gamma_{s_3}(z) = -1/z$. Niinpä γ_{s_3} yhdistää sivun s_3 sivuun s_3.

Harjoitustehtävä 20.4. *Olkoon* $\Gamma = \{\gamma_n \mid \gamma_n(z) = 2^n,\ n \in \mathbb{Z}\}$. *Ryhmän* Γ *Dirichlet'n monikulmio konstruoitiin Harjoitustehtävässä* **??**. *Laske monikulmiota vastaavat sivuja yhdistävät kuvaukset.*

Sivuja yhdistävien kuvausten esittäminen kaavion avulla

On käytännöllistä kuvata Dirichlet'n monikulmion sivuja yhdistäviä kuvauksia kaavion avulla. Piirrämme monikulmion, jonka sivut merkitään nuolenpäillä. Jos on olemassa sivuja s_1 ja s_2 yhdistävä kuvaus, merkitään sivut s_1 ja s_2 yhtä monella nuolenpäällä. Nuolenpäitten suunta näyttää sivujen suunnistuksen ja sivut yhdistävä kuvaus säilyttää tämän suunnistuksen.

21. Elliptiset syklit

Tässä luvussa tarvitsemme sekä ylemmän puolitason $\mathbb{H}$ mallia että Poincarén kiekon $\mathbb{D}$ mallia. Käytämme aina tilanteeseen paremmin sopivaa mallia. Välillä käytämme ylemmän puolitason mallia, mutta piirrämme kuvat Poincarén kiekolle, koska se on kätevämpää. Mallista toiseen siirtymisen mahdollistaa aiemmin käsitelty kuvaus

$$h \colon \mathbb{H} \to \mathbb{D},\ \ z \mapsto \frac{z - i}{iz - 1}.$$

Olkoon Γ Fuchsin ryhmä ja olkoon $D(p)$ ryhmän Γ Dirichlet'n monikulmio. Oletamme, että kaikki monikulmion $D(p)$ kärjet ovat ylemmässä puolitasossa $\mathbb{H}$. Aiemmin huomasimme, että jokaista monikulmion $D(p)$ sivua s vastaa kuvaus $\gamma_s \in \Gamma \setminus \{\mathrm{Id}\}$, joka yhdistää sivun s sivuun $\gamma_s(s)$.

Olkoon v monikulmion $D(p)$ kärki. Tällöin monikulmiolla $D(p)$ on sivut s ja $*s$, joiden päätepiste v on. Otetaan käyttöön merkintä (v, s) kuvaamaan kärkeä v ja sivua s, jonka päätepiste v on. Vastaavasti merkintä $*(v, s)$ tarkoittaa kärkeä v ja toista sivua $*s$, jonka päätepiste v on.

Tarkastellaan seuraavaa menettelytapaa:

(1) Olkoon $v = v_0$ monikulmion $D(p) = D$ kärki, ja olkoon s_0 monikulmion D sivu, jonka toinen päätepiste on v_0. Olkoon γ_1 sivua s_0 vastaava sivut yhdistävä kuvaus. Tällöin γ_1 kuvaa sivun s_0 jollekin monikulmion D sivulle s_1.
(2) Olkoon $s_1 = \gamma_1(s_0)$ ja olkoon $v_1 = \gamma_1(v_0)$. Samme uuden parin (v_1, s_1).
(3) Tarkastellaan sitten paria $*(v_1, s_1)$. Tässä parissa kärki on v_1. Sivu ei ole s_1, vaan se on monikulmion D toinen sivu $*s_1$, jonka kärki on v_1.
(4) Olkoon γ_2 särmää $*s_1$ vastaava sivut yhdistävä kuvaus. Tällöin $s_2 = \gamma_2(*s_1)$ on monikulmion D sivu ja $v_2 = \gamma_2(v_1)$ on monikulmion D kärki.

(5) Jatketaan samaan tapaan.

Edellä olevan menettelyn tuloksena saamme jonon kärkien ja sivujen muodostamia pareja:

$$
\begin{array}{cccccc}
\begin{pmatrix} v_0 \\ s_0 \end{pmatrix} & \xrightarrow{\gamma_1} & \begin{pmatrix} v_1 \\ s_1 \end{pmatrix} & \xrightarrow{*} & \begin{pmatrix} v_1 \\ *s_1 \end{pmatrix} \\
 & \xrightarrow{\gamma_2} & \begin{pmatrix} v_2 \\ s_2 \end{pmatrix} & \xrightarrow{*} & \cdots \\
 & \xrightarrow{\gamma_i} & \begin{pmatrix} v_i \\ s_i \end{pmatrix} & \xrightarrow{*} & \begin{pmatrix} v_i \\ *s_i \end{pmatrix} \\
 & \xrightarrow{\gamma_{i+1}} & \begin{pmatrix} v_{i+1} \\ s_{i+1} \end{pmatrix} & \xrightarrow{*} & \cdots .
\end{array}
$$

Koska pareja (v, s) on vain äärellisen monta, päädymme yllä olevalla menetelmällä lopulta takaisin pariin (v_0, s_0). Olkoon $n > 0$ pienin kokonaisluku, jolle $(v_n, *s_n) = (v_0, s_0)$.

Määritelmä 21.1. Olkoon $\mathcal{E}$ jono

$$v_0 \to v_1 \to \cdots \to v_{n-1}.$$

Käytämme jonosta $\mathcal{E}$ nimitystä *elliptinen sykli*. Kuvauksesta

$$\gamma_n \gamma_{n-1} \cdots \gamma_2 \gamma_1$$

käytämme nimitystä *elliptinen syklikuvaus*.

Koska kärkien ja sivujen muodostamia pareja on vain äärellisen monta, on myös elliptisiä syklejä ja elliptisiä syklikuvauksia ainoastaan äärellisen monta.

Määritelmä 21.2. Olkoon v hyperbolisen monikulmion D kärki ja olkoon s monikulmion D sivu, $v \in s$. Käytämme paria (v, s) vastaavalle elliptiselle syklikuvaukselle merkintää $\gamma_{s,v}$.

Huomautus 21.3. (1) Oletetaan, että aloittaisimme parista $(v, *s)$ parin (v, s) sijaan. Edellinen menetelmä tuottaisi tällöin elliptisen syklikuvauksen $\gamma_{v,*s}$. Laskemalla nähdään, että $\gamma_{v,*s} = \gamma_{v,s}^{-1}$.

(2) Oletetaan sitten, että aloittaisimme parista $(v_i, *s_i)$ parin (v, s) sijaan. Tällöin päätyisimme elliptiseen syklikuvaukseen

$$\gamma_{v_i,*s_i} = \gamma_i \gamma_{i-1} \cdots \gamma_1 \gamma_n \cdots \gamma_{i+2} \gamma_{i+1}.$$

Niinpä kuvaus $\gamma_{v_i,*s_i}$ saadaan permutoimalla syklisesti niitä sivujen yhdistämiskuvauksia, joiden yhdiste γ_{v_0,s_0} on. Edelleen,

$$\gamma_{v_i,*s_i} = (\gamma_i \cdots \gamma_1) \gamma_{v_0,s_0} (\gamma_i \cdots \gamma_1)^{-1},$$

joten kuvaukset $\gamma_{v_i,*s_i}$ ja γ_{v_0,s_0} ovat toistensa konjugaatteja.

Harjoitustehtävä 21.4. *Todista Huomautuksen* **??** *väitteet.*

Olkoon $\gamma_{v,s}$ paria (v, s) vastaava elliptinen syklikuvaus. Tällöin $\gamma_{v,s}$ on Möbius-kuvaus, jolla on kiintopiste $v \in \mathbb{H}$. Luokitellessamme Möbius-kuvauksia huomasimme, että jos Möbius-kuvauksella on kiintopiste ylemmässä puolitasossa, on kuvaus joko elliptinen kuvaus tai identiteettikuvaus. Tästä seuraa, että jokainen elliptinen syklikuvaus on joko elliptinen kuvaus tai identiteettikuvaus.

Määritelmä 21.5. Elliptistä sykliä sanotaan *satunnaiseksi*, jos sitä vastaava elliptinen syklikuvaus on identiteettikuvaus.

Elliptisen syklin kertaluku

Määritelmä 21.6. Olkoon $\gamma \in \text{Möb}(\mathbb{H})$ Möbius-kuvaus. Sanomme, että γ on *äärellistä kertalukua*, jos on olemassa sellainen kokonaisluku $m > 0$, että $\gamma^m = \text{Id}$. Kutsumme pienintä tällaista positiivista kokonaislukua kuvauksen γ *kertaluvuksi.*

Esimerkki 21.7. Poincarén kiekon $\mathbb{D}$ kierto $\gamma(z) = e^{2\pi i\theta}z$ on äärellistä kertalukua, jos ja vain jos θ on rationaaliluku.

Möbius-kuvaukset, jotka ovat konjugaatteja edellisen esimerkin kierrolle (missä $\theta \in \mathbb{Q}$), ovat myös äärellistä kertalukua. Muita äärellistä kertalukua olevia Möbius-kuvauksia ei ole olemassa. Niinpä kaikki äärellistä kertalukua olevat Möbius-kuvaukset ovat elliptisiä. Fuchsin ryhmien alkioille pätee käänteinen tulos: Elliptiset Fuchsin ryhmän alkiot ovat äärellistä kertalukua.

Lause 21.8. *Olkoon Γ Fuchsin ryhmä ja olkoon γ ryhmän Γ elliptinen alkio. Tällöin on olemassa sellainen kokonaisluku $m \geq 1$, että $\gamma^m = \text{Id}$.*

Todistus. Olkoon $\gamma \in \Gamma$ elliptinen kuvaus. Tällöin γ on kuvauksen $z \mapsto e^{2\pi i\theta}z$ konjugaatti jollakin $\theta \in [0, 1)$. Kuvaus $\gamma^n \in \Gamma$ on kuvauksen $z \mapsto e^{2\pi i\theta}z$ konjugaatti kaikilla $n \in \mathbb{Z}$. Lauseen väite on seuraus seuraavasta: Jonon $(n\theta \mod 1)_{n=1}^{\infty}$ alkiot muodostavat joukon $[0, 1]$ diskreetin osajoukon, jos ja vain jos $\theta \in \mathbb{Q}$. Olkoon siis $\theta = k/m$, missä $k, m \in \mathbb{Z}$, $k, m > 0$. Koska Γ on Fuchsin ryhmä, ovat sen aliryhmät diskreettejä. Erityisesti aliryhmä $\{\gamma^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ on diskreetti. Niinpä kuvauksen γ täytyy olla muotoa $z \mapsto e^{2\pi ik/m}z$ olevan kierron konjugaatti. Tästä seuraa, että γ^m on kierron $z \mapsto e^{2\pi ikm/m}z$ eli identiteettikuvauksen konjugaatti. $\square$

Olkoon Γ Fuchsin ryhmä ja D ryhmän Γ Dirichlet'n monikulmio. Olkoon v monikulmion D kärki ja olkoon $\gamma_{v,s}$ vastaava elliptinen syklikuvaus. Lauseen **??** perusteella on olemassa sellainen kokonaisluku $m \geq 1$, että $\gamma_{v,s}^m$ on identiteettikuvaus. Pienintä tällaista lukua m sanotaan kuvauksen $\gamma_{v,s}$ *kertaluvuksi.*

Harjoitustehtävä 21.9.
Osoita, että kuvauksilla γ_{v_0,s_0} ja γ_{v_i,s_i} on sama kertaluku.
Osoita, että kuvauksilla γ ja γ^{-1} on sama kertaluku.

Esimerkistä **??** seuraa, että elliptisen syklikuvauksen kertaluku ei riipu siitä, mistä kärjestä aloitetaan kun muodostetaan elliptinen sykli. Kertaluku ei myöskään riipu siitä aloitetaanko parista (v, s) vai $(v, *s)$. Jos nyt v on jokin kärki elliptisessä syklissä $\mathcal{E}$ ja s on sivu, jolle $v \in s$, otamme elliptisen syklikuvauksen $\gamma_{v,s}$ kertaluvulle käyttöön merkinnän $m_{\mathcal{E}}$. Sanome, että $m_{\mathcal{E}}$ on elliptisen syklin $\mathcal{E}$ *kertaluku.*

Kulmien summa

Olkoon $\angle v$ monikulmion D kärkeä v vastaava kulma. Elliptisen syklin $\mathcal{E}$

$$v_0 \to v_1 \to \cdots \to v_{n-1}.$$

kulmien summa on

$$\mathrm{sum}(\mathcal{E}) = \angle v_0 + \cdots + \angle v_{n-1}.$$

On selvää, että kulmien summa on riippumaton siitä, mistä kärjestä lähdetään liikkeelle kun määritellään $\mathcal{E}$.

Lause 21.10. *Olkoon Γ Fuchsin ryhmä ja olkoon D ryhmän Γ Dirichlet'n monikulmio. Oletetaan, että monikulmion kaikki kärjet ovat ylemmässä puolitasossa $\mathbb{H}$. Olkoon $\mathcal{E}$ elliptinen sykli. Tällöin on olemassa sellainen kokonaisluku $m_{\mathcal{E}} \geq 1$, että*

$$m_{\mathcal{E}}\ \mathrm{sum}(\mathcal{E}) = 2\pi.$$

Todistus. Katso S. Katokin kirjasta. □

Huomautus 21.11. Edellä kutsuimme elliptistä sykliä $\mathcal{E}$ satunnaiseksi, jos sitä vastaava elliptinen syklikuvaus oli identiteettikuvaus. Selvästi identiteettikuvauksen kertaluku on 1. Niinpä satunnaisen elliptisen syklin kertaluku on $m_{\mathcal{E}} = 1$ ja kulmien summa on $\mathrm{sum}(\mathcal{E}) = 2\pi$.

22. Poincarén lause: osa 1

Poicarén Teoreema

Edellä konstruoimme annettua Fuchsin ryhmää vastaavan Dirichlet'n monikulmion ja joukon sivuja yhdistäviä kuvauksia. Seuraavaksi teemme päin vastoin. Lähdemme liikkeelle tilanteesta, jossa meillä on konveksi hyperbolinen monikulmio ja joukko sivuja yhdistäviä kuvauksia. Kysymme: Milloin nämä sivuja yhdistävät kuvaukset virittävät Fuchsin ryhmän? Yleensä sivuja yhdistävien kuvausten virittämä ryhmä ei ole diskreetti, joten se ei ole Fuchsin ryhmä. Poincarén teoreema kertoo, että sopivien ehtojen ollessa voimassa, ryhmä kuitenkin on diskreetti.

Olkoon D konveksi hyperbolinen monikulmio. Tässä luvussa oletamme, että kaikki monikulmion D kärjet ovat ylemmässä puolitasossa, toisin sanoen yksikään kärjistä ei ole reunalla $\partial\mathbb{H}$. Oletetaan, että monikulmiota D vastaa joukko sivuja yhdistäviä kuvauksia. Siis jokaista monikulmion D sivua s kohti on olemassa yksikäsitteinen Möbius-kuvaus γ_s ja sivu s', joille $\gamma_s(s) = s'$.

Konstruoimme elliptisiä syklejä kuten edellä:

(1) Olkoon $v = v_0$ jokin monikulmion D kärjistä ja olkoon s_0 sivu, jonka päätepiste on v_0. Olkoon γ_1 sivua s_0 vastaava sivut yhdistävä kuvaus. Tällöin γ_1 kuvaa sivun s_0 sivulle s_1.

(2) Olkoon $s_1 = \gamma_1(s_0)$ ja olkoon $v_1 = \gamma_1(v_0)$. Saamme uuden parin (v_1, s_1).

(3) Tarkastellaan paria $*(v_1, s_1)$. Tämä pari koostuu kärjestä v_1 ja sivusta $*s_1$ (monikulmion D sivu, jonka päätepiste on v_1, mutta joka ei ole s_1).

(4) Jatketaan samaan tapaan.

Saamme jonon kärkien ja sivujen muodostamia pareja:

$$\begin{array}{cccccc}
\begin{pmatrix} v_0 \\ s_0 \end{pmatrix} & \xrightarrow{\gamma_1} & \begin{pmatrix} v_1 \\ s_1 \end{pmatrix} & \xrightarrow{*} & \begin{pmatrix} v_1 \\ *s_1 \end{pmatrix} \\
& \xrightarrow{\gamma_2} & \begin{pmatrix} v_2 \\ s_2 \end{pmatrix} & \xrightarrow{*} & \cdots \\
& \xrightarrow{\gamma_i} & \begin{pmatrix} v_i \\ s_i \end{pmatrix} & \xrightarrow{*} & \begin{pmatrix} v_i \\ *s_i \end{pmatrix} \\
& \xrightarrow{\gamma_{i+1}} & \begin{pmatrix} v_{i+1} \\ s_{i+1} \end{pmatrix} & \xrightarrow{*} & \cdots .
\end{array}$$

Koska pareja (v, s) on ainoastaan äärellisen monta, päädymme lopulta takasin lähtöpariin (v_0, s_0). Olkoon n pienin positiivinen kokonaisluku, jolle $(v_n, *s_n) = (v_0, s_0)$.

Määritelmä 22.1. Kärkijonoa $\mathcal{E} = v_0 \to v_1 \to \cdots \to v_{n-1}$ sanotaan *elliptiseksi sykliksi*. Kuvausta $\gamma_n \gamma_{n-1} \cdots \gamma_2 \gamma_1$ sanotaan *elliptiseksi syklikuvaukseksi*.

Koska kärkien ja sivujen muodostamia pareja on ainoastaan äärellisen monta, on myös elliptisiä syklejä ja elliptisiä syklikuvauksia ainoastaan äärellisen monta.

Määritelmä 22.2. Olkoon v hyperbolisen monikulmion D kärki ja olkoon s monikulmion D sivu, jonka päätepiste on v. Käytämme paria (v, s) vastaavalle elliptiselle syklikuvaukselle merkintää $\gamma_{v,s}$.

Määritelmä 22.3. Olkoon $\angle v$ monikulmion D kärkeä v vastaava kulma. Elliptisen syklin $\mathcal{E} = v_0 \to v_1 \to \cdots \to v_{n-1}$ *kulmien summa* on

$$\mathrm{sum}(\mathcal{E}) = \angle v_0 + \cdots + \angle v_{n-1}.$$

Määritelmä 22.4. Sanomme, että elliptinen sykli $\mathcal{E}$ toteuttaa *elliptisen sykliehdon*, jos on olemassa sellainen kokonaisluku $m \geq 1$, että

$$m\ \mathrm{sum}(\mathcal{E}) = 2\pi.$$

Teoreema 22.5. *Olkoon D konveksi hyperbolinen monikulmio, jolla on ainoastaan äärellisen monta sivua. Oletetaan, että kaikki monikulmion D kärjet ovat ylemmässä puolitasossa $\mathbb{H}$, ja että $\mathcal{G}$ on joukko sivut yhdistäviä monikulmion D Möbius-kuvauksia. Oletetaan lisäksi, että $\gamma_s(s) \neq s$ kaikilla sivuilla s. Olkoot joukkoa $\mathcal{G}$ vastaavat elliptiset syklit $\mathcal{E}_1, \ldots, \mathcal{E}_r$. Oletetaan, että jokainen elliptinen sykli $\mathcal{E}_j$, $1 \leq j \leq r$, toteuttaa elliptisen sykliehdon: jokaista elliptistä sykliä $\mathcal{E}_j$, $1 \leq j \leq r$, vastaa sellainen kokonaisluku $m_j \geq 1$, että*

$$m_j\ \mathrm{sum}(\mathcal{E}_j) = 2\pi.$$

Tällöin

(1) *Joukon $\mathcal{G}$ virittämä ryhmä $\Gamma = \langle \mathcal{G} \rangle$ on Fuchsin ryhmä.*

(2) *Monikulmio D on Fuchsin ryhmän Γ Dirichet'n monikulmio.*

(3) *Fuchsin ryhmä Γ voidaan kirjoittaa virittäjien ja relaatioiden avulla seuraavalla tavalla: Valitse jokaista elliptistä sykliä $\mathcal{E}_j$ kohti elliptinen syklikuvaus $\gamma_{v,s}$ (missä v on jokin elliptisen syklin $\mathcal{E}$ kärjistä). Tällöin Γ on isomorfinen ryhmän kanssa, jonka virittäjiä ovat $\gamma_s \in \mathcal{G}$ ja relaatioita kuvaukset $\gamma_j^{m_j}$:*

$$\Gamma \simeq \langle \gamma_s \in \mathcal{G} \mid \gamma_1^{m_j} = \gamma_2^{m_2} = \cdots = \gamma_r^{m_r} = e \rangle.$$

Todistus. Katso Katokin tai Beardonin kirjasta. Beardon selittää tarkemmin joukkoa $\mathcal{G}$. □

Huomautus 22.6. Edellisen teoreeman kohdan (3) relaatiot näyttävät riippuvan siitä, mitä elliptisen syklin $\mathcal{E}_j$ pareista (v, s) käytettiin kun määriteltiin γ_j. Itse asiassa relaatio γ_j^{mj} ei riipu parin (v, j) valinnasta. Tämä seuraa Harjoitustehtävästä **??**: Jos v' ja v ovat saman elliptisen syklin kärkiä, niin kuvaus $\gamma_{v',s'}$ on joko kuvauksen $\gamma_{v,s}$ tai kuvauksen $\gamma_{v,s}^{-1}$ konjugaatti.

Huomautus 22.7. Oletus, että mitään monikulmion D sivua ei yhdistetä itseensä, on ainoastaan näennäinen rajoitus: Olkoon s monikulmion D sellainen sivu, että $\gamma_s(s) = s$. Olkoot sivun s päätepisteet kärjet v_0 ja v_1. Otetaan käyttöön uusi kärki v_2, joka on janan $[v_0, v_1]$ keskipiste. Huomaa, että $\gamma_s(v_2) = v_2$. Tällöin $\gamma_s(v_0) = v_1$ ja $\gamma_s(v_1) = v_0$. (Muussa tapauksessa olisi $\gamma_s(v_0) = v_0$ ja $\gamma_s(v_1) = v_1$. Tällöin kuvauksella γ_s olisi kolme kiintopistettä, mistä seuraisi, että γ_s olisi identiteettikuvaus.) Olkoot $s_1 = [v_0, v_2]$ ja $s_2 = [v_2, v_1]$. Tällöin $\gamma_s(s_1) = s_2$ ja $\gamma_s(s_2) = s_1$, joten γ_s yhdistää sivut s_1 ja s_2. Huomaa, että kärkeä v_2 vastaava kulma on π. Siis: Jos hyperbolisen monikulmion sivuja yhdistävällä kuvauksella γ_s, jolle $\gamma_s(s) = s$, on elliptinen kiintopiste $v \in s$, voimme kutsua myös pistettä v monikulmion kärjeksi.

Hyperbolinen kahdeksankulmio

Edellisten lukujen perusteella tiedetään, että on olemassa säännöllinen hyperbolinen kahdeksankulmio P, jonka jokainen kulma on $\pi/4$. Nimetään kahdeksankulmion P kärjet vastapäivään $v_1, \ldots, v_8$ ja nimetään sivut vastapäivään $s_1, \ldots, s_8$, $s_1 = [v_1, v_2]$, $s_2 = [v_2, v_3]$, jne. Koska P on säännöllinen monikulmio, ovat kaikki sivut saman pituisia.

Olkoot sivuja yhdistävät kuvaukset seuraavat:

$$\gamma_1 \colon s_1 \to s_3, \text{ jolle } \gamma_1(v_1) = v_4,$$

$$\gamma_2 \colon s_4 \to s_2, \text{ jolle } \gamma_2(v_5) = v_2,$$

$$\gamma_3 \colon s_5 \to s_7 \text{ jolle } \gamma_3(v_5) = v_8.$$

$$\gamma_4 \colon s_8 \to s_6, \text{ jolle } \gamma_4(v_1) = v_6.$$

Saamme jonon kärkien ja sivujen muodostamia pareja:

$$
\begin{array}{cccccc}
\begin{pmatrix} v_1 \\ s_1 \end{pmatrix} & \xrightarrow{\gamma_1} & \begin{pmatrix} v_4 \\ s_3 \end{pmatrix} & \xrightarrow{*} & \begin{pmatrix} v_4 \\ s_4 \end{pmatrix} \\
& \xrightarrow{\gamma_2} & \begin{pmatrix} v_3 \\ s_2 \end{pmatrix} & \xrightarrow{*} & \begin{pmatrix} v_3 \\ s_3 \end{pmatrix} \\
& \xrightarrow{\gamma_1^{-1}} & \begin{pmatrix} v_2 \\ s_1 \end{pmatrix} & \xrightarrow{*} & \begin{pmatrix} v_2 \\ s_2 \end{pmatrix} \\
& \xrightarrow{\gamma_2^{-1}} & \begin{pmatrix} v_5 \\ s_4 \end{pmatrix} & \xrightarrow{*} & \begin{pmatrix} v_5 \\ s_5 \end{pmatrix} \\
& \xrightarrow{\gamma_3} & \begin{pmatrix} v_8 \\ s_7 \end{pmatrix} & \xrightarrow{*} & \begin{pmatrix} v_8 \\ s_8 \end{pmatrix} \\
& \xrightarrow{\gamma_4} & \begin{pmatrix} v_7 \\ s_6 \end{pmatrix} & \xrightarrow{*} & \begin{pmatrix} v_7 \\ s_7 \end{pmatrix} \\
& \xrightarrow{\gamma_3^{-1}} & \begin{pmatrix} v_6 \\ s_5 \end{pmatrix} & \xrightarrow{*} & \begin{pmatrix} v_6 \\ s_6 \end{pmatrix} \\
& \xrightarrow{\gamma_4^{-1}} & \begin{pmatrix} v_1 \\ s_8 \end{pmatrix} & \xrightarrow{*} & \begin{pmatrix} v_1 \\ s_1 \end{pmatrix}
\end{array}
$$

Niinpä saamme ainoastaan yhden elliptisen syklin:

$$\mathcal{E} = v_1 \to v_4 \to v_3 \to v_2 \to v_5 \to v_8 \to v_7 \to v_6,$$

jota vastaa elliptinen syklikuvaus

$$\gamma_4^{-1}\gamma_3^{-1}\gamma_4\gamma_3\gamma_2^{-1}\gamma_1^{-1}\gamma_2\gamma_1.$$

Koska kahdeksankulmion P jokainen kulma on $\pi/4$ on kulmien summa

$$8\frac{\pi}{4} = 2\pi.$$

Niinpä elliptinen sykliehto on voimassa ($m_{\mathcal{E}} = 1$). Poincarén teoreemasta seuraa, että sivujayhdistävät kuvaukset $\gamma_1, \ldots, \gamma_4$ virittävät Fuchsin ryhmän. Virittäjien ja relaatioiden avulla kirjoitettuna tämä ryhmä on

$$\langle \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4 \mid \gamma_4^{-1}\gamma_3^{-1}\gamma_4\gamma_3\gamma_2^{-1}\gamma_1^{-1}\gamma_2\gamma_1 = e \rangle.$$

23. Poincarén lause: osa 2

Edellisessä luvussa tarkastelimme sivuja yhdistävien kuvausten virittämää ryhmää tilanteessa, missä hyperbolisen monikulmion kaikki kärjet olivat ylemmässä puolitasossa $\mathbb{H}$. Tässä luvussa tarkastelemme tilannetta, missä osa monikulmion kärjistä on reunalla $\partial\mathbb{H}$.

Poincarén teoreema reunalla olevien kärkien tapauksessa

Palautetaan mieleen, että konveksi hyperbolinen monikulmio voidaan määritellä äärellisen monen puolitason leikkauksena. Tällöin on mahdollista, että monikulmiolla on sivu reunalla $\partial\mathbb{H}$. Reunalla olevia sivuja kutsutaan *vapaiksi sivuiksi.* Oletamme, että monikulmiolla ei ole vapaita sivuja, eli että jokainen monikulmion sivu on geodeesin osa.

Olkoon D konveksi, hyperbolinen monikulmio, jolla ei ole vapaita sivuja. Olkoon γ_s monikulmion D sivua s vastaava sivut yhdistävä kuvaus. Möbius-kuvaukset kuvaavat reunan $\partial\mathbb{H}$ itselleen, joten jokainen sivut yhdistävä kuvaus kuvaa reunalla olevat kärjet reunalla oleville kärjille.

Olkoon $v = v_0$ monikulmion D reunalla $\partial\mathbb{H}$ oleva kärki ja olkoon $s = s_0$ sivu, jonka toinen päätepiste on v. Teemme kuten edellisessä luvussa (käyttäen samoja merkintöjä), aloitamme parista (v_0, s_0) ja muodostamme jonon $\mathcal{P}$ reunalla $\partial\mathbb{H}$ olevia kärkiä,

$$\mathcal{P} = v_0 \to \cdots \to v_{n-1}$$

sekä vastavan Möbius-kuvauksen $\gamma_{v,s} = \gamma_n \cdots \gamma_1$.

Määritelmä 23.1. Olkoon $v = v_0$ hyperbolisen monikulmion D reunalla $\partial\mathbb{H}$ oleva kärki ja olkoon $s = s_0$ sivu, jonka toinen päätepiste on v. Sanomme, että $\mathcal{P} = v_0 \to \cdots \to v_{n-1}$ on *parabolinen sykli* ja $\gamma_{s,v} = \gamma_n \cdots \gamma_1$ sykliä $\mathcal{P}$ vastaava *parabolinen syklikuvaus*.

Koska monikulmiolla D on ainoastaan äärellisen monta kärkeä ja sivua, on myös parabolisia syklejä ja parabolisia syklikuvauksia ainoastaan äärellisen monta.

Huomautus 23.2.

(1) Jos parin (v, s) sijaan lähdetään liikkeelle parista $(v, *s)$, päädytään paraboliseen syklikuvaukseen $\gamma_{v,s}^{-1}$.
(2) Jos lähdetään liikkelle parista (v_i, s_i), niin päädytään paraboliseen syklikuvaukseen

$$\gamma_{v_1,s_i} = \gamma_i\gamma_{i-1}\cdots\gamma_1\gamma_n\cdots\gamma_{i+2}\gamma_{i+1} = (\gamma_i\cdots\gamma_1)\gamma_{v_0,s_0}(\gamma_i\cdots\gamma_1)^{-1}.$$

Olkoon v monikulmion D reunalla $\partial\mathbb{H}$ oleva kärki ja olkoon s sivu, jonka päätepiste on v. Olkoon $\gamma_{v,s}$ vastaava parabolinen syklikuvaus. Huomaa, että $\gamma_{v,s}$ on Möbius-kuvaus, jolla on kiintopiste $v \in \partial\mathbb{H}$. Edellisten luentojen perusteella tiedämme, että Möbius-kuvaus, jolla on vähintään yksi kiintopiste reunalla $\partial\mathbb{H}$, on joko parabolinen, hyperbolinen tai identiteettikuvaus. Niinpä jokainen parabolinen syklikuvaus on joko parabolinen tai hyperbolinen Möbius-kuvaus tai identiteettikuvaus.

Määritelmä 23.3. Sanomme, että parabolinen sykli $\mathcal{P}$ toteuttaa *parabolisen sykliehdon*, jos jotakin (ja täten jokaista) kärkeä $v \in \mathcal{P}$ vastaava parabolinen syklikuvaus $\gamma_{v,s}$ on joko parabolinen Möbius-kuvaus tai identiteettikuvaus.

Huomautus 23.4. Olkoon $\gamma \in \text{Möb}(\mathbb{H}) \setminus \{\text{Id}\}$. Kuvaus γ on parabolinen, jos ja vain jos sen jälki $\tau(\gamma) = 4$. Huomaa, että myös jos $\gamma = \text{Id}$, niin $\tau(\gamma) = 4$. Niinpä parabolinen sykli $\mathcal{P}$ toteuttaa parabolisen sykliehdon, jos jotakin (ja täten jokaista) kärkeä $v \in \mathcal{P}$ vastaavalle syklikuvaukselle $\gamma_{v,s}$ pätee $\tau(\gamma_{v,s}) = 4$.

Huomautus 23.5. Kuvaus γ_{v_0,s_0} on parabolinen (tai identiteettikuvaus) jos ja vain jos mitä tahansa kärkeä v_i, joka kuuluu samaan paraboliseen sykliin kuin v_0, vastaava kuvaus γ_{v_i,s_i} on parabolinen (tai identiteettikuvaus). Edelleen $\gamma_{v,s}$ on parabolinen (tai identiteettikuvaus), jos ja vain jos $\gamma_{v,*s}$ on parabolinen (tai identiteettikuvaus).

Seuraava teoreema on Poincarén teoreema tilanteessa, missä monikulmiolla D on ainakin yksi kärki reunalla $\partial\mathbb{H}$, mutta ei vapaita sivuja.

Teoreema 23.6. *Olkoon D konveksi hyperbolinen monikulmio, jolla on ainoastaan äärellisen monta sivua (ei vapaita sivuja), ja mahdollisesti kärkiä reunalla $\partial\mathbb{H}$. Olkoon $\mathcal{G}$ joukko sivuja yhdistäviä monikulmion D Möbius-kuvauksia. Oletetaan lisäksi, että $\gamma_s(s) \neq s$ kaikilla $\gamma_s \in \mathcal{G}$.*

Olkoot elliptiset syklit $\mathcal{E}_1, \ldots, \mathcal{E}_r$ ja olkoot paraboliset syklit $\mathcal{P}_1, \ldots, \mathcal{P}_s$. Oletetaan, että

(1) *jokainen elliptinen sykli $\mathcal{E}_i$ toteuttaa elliptisen sykliehdon, ja*
(2) *jokainen parabolinen sykli $\mathcal{P}_j$ toteuttaa parabolisen sykliehdon.*

Tällöin:

(1) *Joukon $\mathcal{G}$ virittämä aliryhmä $\Gamma = \langle \mathcal{G} \rangle$ on Fuchsin ryhmä.*
(2) *Monikulmio D on Fuchsin ryhmän Γ perusalue.*
(3) *Fuchsin ryhmä Γ voidaan kirjoittaa virittäjien ja relaatioiden avulla seuraavalla tavalla: Valitse jokaista elliptistä sykliä $\mathcal{E}_i$ kohti elliptinen syklikuvaus $\gamma_i = \gamma_{v,s}$ (missä v on jokin elliptisen syklin $\mathcal{E}_i$ kärjistä) Tällöin Γ on isomorfinen ryhmän kanssa, jonka virittäjät ovat $\gamma_s \in \langle \mathcal{G} \rangle$, ja relaatiot $\gamma_i^{m_i}$, missä $m_i \operatorname{sum}\mathcal{E}_i = 2\pi$:*

$$\Gamma = \langle \gamma_s \in \mathcal{G} \mid \gamma_1^{m_1} = \cdots = \gamma_r^{m_r} = e \rangle.$$

Todistus. Katso Katokin tai Beardonin kirjasta. □

Kuten aiemmin, tässäkään tilanteessa oletus, että mitään sivua ei yhdistetä itseensä, ei ole olennainen rajoitus; tarvittaessa voidaan monikulmioon lisätä uusi kärki (sivun keskipiste) kuten edellä.

Esimerkki Poincarén teoreemasta: modulaariryhmä

Seuraavaksi sovellamme Teoreemaa **??** modulaariryhmän $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z})$ tutkimiseen. Esitämme ryhmän $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z})$ virittäjien ja relaatioitten avulla.

Tarkastellaan seuraavaa monikulmiota, missä $A = (-1 + i\sqrt{3})/2$ ja $B = (1 + i\sqrt{3})/2$. Sivuja yhdistävät kuvaukset ovat $\gamma_1(z) = z+1$ ja $\gamma_2(z) = -1/z$. Huomaa, että $\gamma_2(A) = B$ ja $\gamma_2(B) = A$.

Kuvaus γ_2 yhdistää sivun $[A, B]$ sivuun $[A, B]$. Niinpä lisäämme monikulmioon uuden kärjen C, joka on sivun $[A, B]$ keskipiste i. Monikulmion sivut ovat ovat nyt seuraavat: s_1 yhdistää pisteet A ja ∞, s_2 yhdistää pisteet B ja ∞, s_3 yhdistää pisteet A ja C, s_4 yhdistää pisteet C ja B.

Ensin määritämme elliptiset syklit. Aloitamme elliptisestä syklistä, joka sisältää kärjen A:

$$\begin{array}{ccccc} \begin{pmatrix} A \\ s_1 \end{pmatrix} & \xrightarrow{\gamma_1} & \begin{pmatrix} B \\ s_2 \end{pmatrix} & \xrightarrow{*} & \begin{pmatrix} B \\ s_4 \end{pmatrix} \\ & \xrightarrow{\gamma_2^{-1}} & \begin{pmatrix} A \\ s_3 \end{pmatrix} & \xrightarrow{*} & \begin{pmatrix} A \\ s_1 \end{pmatrix}. \end{array}$$

Niinpä $A \to B$ on elliptinen sykli, jota vastaa elliptinen syklikuvaus $\gamma_2^{-1}\gamma_1(z) = (-z-1)/z$. Tätä elliptistä sykliä vastaavalle kulmien summalle pätee

$$3(\angle A + \angle B) = 3(\pi/3 + \pi/3) = 2\pi,$$

joten elliptinen sykliehto on voimassa. Määritetään seuraavaksi elliptinen sykli, joka sisältää kärjen C:

$$\begin{pmatrix} C \\ s_3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\gamma_2} \begin{pmatrix} C \\ s_4 \end{pmatrix} \xrightarrow{*} \begin{pmatrix} C \\ s_3 \end{pmatrix}.$$

Tätä elliptistä sykliä vastaava syklikuvaus on γ_2. Kulmien summalle pätee

$$2\angle C = 2\pi,$$

joten elliptinen sykliehto on voimassa.

Seuraavaksi määritämme paraboliset syklit. Parabolisia syklejä on vain yksi, nimittäin sykli, joka sisältää kärjen ∞:

$$\begin{pmatrix} \infty \\ s_1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\gamma_1} \begin{pmatrix} \infty \\ s_2 \end{pmatrix} \xrightarrow{*} \begin{pmatrix} \infty \\ s_1 \end{pmatrix},$$

joten saamme parabolisen syklin ∞ ja sitä vastaavan syklikuvauksen $\gamma_1(z) = z+1$. Kuvaus γ_1 on parabolinen, koska sillä on täsmälleen yksi kiintopiste ∞. Niinpä parabolinen sykliehto on voimassa.

Sovellamme Poincarén teoreemaa ja esitämme kuvausten γ_1 ja γ_2 virittämän ryhmän virittäjien ja relaatioitten avulla suraavasti:

$$\mathrm{PSL}(2,\mathbb{Z}) = \langle a, b \mid (b^{-1}a)^3 = b^2 = e \rangle.$$

Huomautus 23.7. Ylläolevasta esimerkistä käy ilmi, miksi oletamme, että mitään monikulmion sivua ei yhdistetä itseensä. Jos emme olisi lisänneet kärkeä C, emme olisi saaneet relaatiota $b^2 = e$.

24. Ryhmien toiminnoista monistoilla

Määritelmä 24.1. Topologinen avaruus X on *topologinen n-ulotteinen monisto* eli *n-monisto*, jos se toteuttaa seuraavat ehdot:

(1) Avaruus X on Hausdorffin avaruus.
(2) Avaruuden X topologialla on numeroituva kanta.
(3) Jokaisella avaruuden X pisteellä on avoin ympäristö U_x, joka on homeomorfinen avaruuden $\mathbb{R}^n$ kanssa.

Esimerkki 24.2.

(1) Avaruus $\mathbb{R}^n$ on n-monisto kaikilla $n \geq 0$.
(2) Avaruuden $\mathbb{R}^n$ avoimet osajoukot ovat n-monistoja kaikilla $n \geq 0$.
(3) Jos M on m-monisto ja N on n-monisto, niin $M \times N$ on $(m+n)$-monisto.
(4) Pallo $\mathbb{S}^n$ on n-monisto kaikilla $n \geq 0$.
(5) Torus $T^2 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ on 2-monisto.

Olkoon G topologinen ryhmä ja olkoon X topologinen avaruus. Sanomme, että ryhmä G *toimii avaruudessa* X, jos on olemassa kuvaus

$$\theta\colon G \times X \to X,$$

jolle pätee:

(1) $\theta(g, \theta(h, x)) = \theta(gh, x)$ kaikilla $h, g \in G$ ja kaikilla $x \in X$.
(2) $\theta(e, x) = x$, kaikilla $x \in X$, missä e on ryhmän G neutraalialkio.

Tällöin sanotaan, että X on G-avaruus. Usein kuvaus θ jätetään pois merkinnöistä. Tällöin ylläolevat ehdot voidaan kirjoittaa muodossa:

(1) $g(hx) = (gh)x$.
(2) $e(x) = x$.

Olkoon $g \in G$. Olkoon

$$\theta_g\colon X \to X, \;\; x \mapsto \theta_g(x) = \theta(g, x) = g(x).$$

Tällöin

$$\theta_g \theta_h = \theta_{gh} \;\text{ ja }\; \theta_e = \mathrm{id}_X,$$

joten

$$\theta_g \theta_{g^{-1}} = \theta_e = \mathrm{id}_X = \theta_{g^{-1}} \theta_g.$$

Siis jokainen kuvaus $\theta_g\colon X \to X$ on homeomorfismi.

Olkoon $\mathrm{Homeo}(X)$ avaruuden X homeomorfismien muodostama ryhmä, jonka laskutoimistus on kuvausten yhdistäminen. Tällöin toiminta $\theta\colon G \times X \to X$ määrittelee homomorfismin

$$\tilde{\theta}\colon G \to \mathrm{Homeo}(X), \;\; g \mapsto \theta_g.$$

Olkoon

$$\ker(\tilde{\theta}) = \{g \in G \mid \tilde{\theta}(g) = \mathrm{id}_X\} = \{g \in G \mid g(x) = x \;\text{ kaikilla }\; x \in X\}.$$

Tällöin $\ker(\tilde{\theta}) = \theta^{-1}(\mathrm{id}_X)$ on ryhmän G normaali aliryhmä. Sanotaan, että toiminta θ on *tehokas*, jos $\ker(\tilde{\theta}) = \{e\}$. Kuten edellä pisteen $x \in X$ *isotropiaryhmä* eli *vakauttaja* on

$$G_x = \{g \in G \mid g(x) = x\}$$

ja sen rata on

$$Gx = \{g(x) \mid g \in G\}.$$

Jos $G_x = \{e\}$, sanotaan, että ryhmä G toimii *vapaasti* avaruudessa X.

Huomautus 24.3. Vapaa toiminta on aina tehokas. Tehokas toiminta ei välttämättä ole vapaa: Ryhmä $G = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ toimii avaruudessa $\mathbb{R}$ kun sen epätriviaali alkio vastaa kertomista luvulla -1. Toiminta ei ole vapaa, koska $G_0 = G \neq \{1\}$. Kuitenkin toiminta on tehokas.

Määritelmä 24.4. Olkoot X ja Y topologisia avaruuksia ja olkoon $f\colon X \to Y$ jatkuva kuvaus. Kuvausta f sanotaan *vahvaksi*, jos alkukuva $f^{-1}(K)$ on kompakti kaikilla avaruuden Y kompakteilla osajoukoilla K.

Lemma 24.5. *Olkoot X ja Y topologisia monistoja ja olkoon $f\colon X \to Y$ jatkuva kuvaus. Tällöin seuraavat ehdot ovat yhtäpitäviä:*

(1) *Kuvaus f on vahva.*
(2) *Kuvaus f on suljettu (eli se kuvaa kaikki avaruuden X suljetut osajoukot avaruuden Y suljetuiksi osajoukoiksi) ja alkukuva $f^{-1}(y)$ on kompakti kaikilla $y \in K$.*

Todistus. Harjoitustehtävä. Todistus voi myös löytyä topologian oppikirjoista, vaikka se on tapana jättää harjoitustehtäväksi. □

Huomaa, että Lemmassa **??** oletetaan, että X ja Y ovat topologisia monistoja. Tämä ei ole välttämätön oletus vaan tulos pätee myös yleisimmille topologisille avaruuksille. Tällä kurssilla tarvitsemme ainoastaan monistoja koskevan tuloksen.

Määritelmä 24.6. Olkoon $\theta\colon G \times X \to X$ topologisen ryhmän G toiminta topologisessa avaruudessa X. Toimintaa θ sanotaan *vahvaksi*, jos kuvaus

$$\hat{\theta}\colon G \times X \to X \times X, \quad (g, x) \mapsto (gx, x),$$

on vahva.

Topologista avaruutta sanotaan *lokaalisti kompaktiksi*, jos sen jokaisella pisteellä on mielivaltaisen pieniä ympäristöjä, joiden sulkeuma on kompakti. Esimerkiksi topologiset monistot ovat lokaalisti kompakteja.

Tarvitsemme seuraavaa lemmaa diskreetin ryhmän tapauksessa. Koska tulos pätee yleisemmin *Lien ryhmille*, esitämme sen seuraavasti:

Lemma 24.7. *Olkoon $\theta\colon G \times X \to X$ Lien ryhmän G toiminta lokaalisti kompaktissa Hausdorffin avaruudessa X. Tällöin seuraavat ehdot ovat yhtäpitäviä:*
(1) *Toiminta θ on vahva.*
(2) *Kaikilla avaruuden X kompakteilla osajoukoilla K joukko*

$$\{g \in G \mid gK \cap K \neq \emptyset\}$$

on ryhmän G kompakti osajoukko.

Todistus. Lisätään kirjallisuusviite... □

Määritelmä 24.8. Diskreetin ryhmän G toimintaa $\theta\colon G \times X \to X$ Hausdorffin avaruudessa X sanotaan *vahvasti epäjatkuvaksi*, jos se on vahva toiminta.

Olkoon Γ Fuchsin ryhmä, joka toimii ylemmässä puolitasossa $\mathbb{H}$. Aiemmin määrittelimme ryhmän Γ toiminnan vahvasti epäjatkuvaksi, jos sille pätee, että joukko $\{g \in \Gamma \mid g(x) \in K\}$ on äärellinen kaikilla $x \in \mathbb{H}$ ja kaikilla ylemmän puolitason kompakteilla osajoukoilla K. Osoitamme, että Fuchsin ryhmän tapauksessa tämä määritelmä on yhtäpitävä tässä luvussa esitetyn määritelmän kanssa:

Lemma 24.9. *Olkoon Γ Fuchsin ryhmä, joka toimii ylemmässä puolitasossa $\mathbb{H}$. Tällöin seuraavat ehdot ovat yhtäpitävät:*
(1) *Kaikilla $x \in \mathbb{H}$ ja kaikilla kompakteilla ylemmän puolitason osajoukoilla K joukko $\{g \in \Gamma \mid g(x) \in K\}$ on äärellinen.*
(2) *Kaikilla kompakteilla ylemmän puolitason osajoukoilla K joukko $\{g \in \Gamma \mid gK \cap K \neq \emptyset\}$ on äärellinen.*

Todistus. Oletetaan, että ensimmäinen ehto on voimassa. Olkoon K ylemmän puolitason kompakti osajoukko. Osoitetaan, että joukko $\{g \in \Gamma \mid gK \cap K \neq \emptyset\}$ on äärellinen. Tehdään vastaoletus ja oletetaan, että se on ääretön. Tällöin kaikilla luonnollisilla luvuilla n on olemassa $g_n \in \Gamma$ ja $z_n \in K$, joille $g_n(z_n) \in K$. Siirtymällä tarvittaessa osajonoon voidaan olettaa, että $g_n \neq g_m$ kun $n \neq m$. Koska K on kompakti, voidaan olettaa (siirtymällä taas tarvittaessa osajonoihin), että

$$z_n \to z \in K \text{ ja } g_n(z_n) \to y \in K.$$

Tällöin kolmioepäyhtälön perusteella

$$d_{\mathbb{H}}(g_n(z), y) \leq d_{\mathbb{H}}(g_n(z), g_n(z_n)) + d_{\mathbb{H}}(g_n(z_n), y).$$

Koska metriikka $d_{\mathbb{H}}$ on Γ-invariantti, on epäyhtälön oikea puoli yhtä kuin

$$d_{\mathbb{H}}(z, z_n) + d_{\mathbb{H}}(g_n(z_n), y),$$

mikä puolestaan lähestyy nollaa kun n kasvaa rajatta. Siis $y \in \mathbb{H}$ on radan $\Gamma(z)$ kasautumispiste. Päädyimme ristiriitaan, koska rata $\Gamma(z)$ on diskreetti. Siis joukko $\{g \in \Gamma \mid gK \cap K \neq \emptyset\}$ on äärellinen.

Oletetaan seuraavaksi, että jälkimmäinen ehto on voimassa. Tällöin Lemman **??** perusteella kuvaus

$$\hat{\theta}\colon \Gamma \times \mathbb{H} \to \mathbb{H} \times \mathbb{H}, \quad (g, z) \mapsto (gz, z),$$

on vahva. Olkoon $x \in \mathbb{H}$ ja olkoon K ylemmän puolitason kompakti osajoukko. Koska joukko $\{x\} \times K$ on kompakti ja $\hat{\theta}$ on vahva kuvaus, on joukko

$$\hat{\theta}^{-1}(\{x\} \times K) = \{(g, y) \in \Gamma \times \mathbb{H} \mid g^{-1}(x) = y \in K\}$$

kompakti. Olkoon $\mathrm{pr}\colon \Gamma \times \mathbb{H} \to \Gamma$ projektio. Koska pr on jatkuva, on

$$\mathrm{pr}(\hat{\theta}^{-1}(\{x\} \times K)) = \{g \in \Gamma \mid g^{-1}(x) \in K\}$$

kompakti ja siis äärellinen, koska Γ on diskreetti. Tällöin myös $\{g \in \Gamma \mid g(x) \in K\}$ on äärellinen. $\square$

Olkoon G topologinen ryhmä, joka toimii Hausdorffin avaruudessa X. Olkoon X/G avaruuden X ratojen Gx, $x \in X$, joukko. Olkoon

$$p\colon X \to X/G, \quad x \mapsto Gx.$$

Tällöin p on surjektio. Kuvauksesta p käytetään nimitystä *luonnollinen projektio*. Sen avulla määritellään topologia joukkoon X/G: Joukon X/G osajoukko U on avoin, jos ja vain jos sen alkukuva $p^{-1}(U)$ on avoin avaruudessa X. Näin saatua joukon X/G topologiaa sanotaan *tekijätopologiaksi*.

Harjoitustehtävä 24.10. *Tarkista, että joukon X/G tekijätopologia on topologia.*

Joukosta X/G tekijätopologialla varustettuna käytetään nimitystä *rata-avaruus*.

Lemma 24.11. *Kuvaus $p\colon X \to X/G$ on avoin.*

Todistus. Olkoon U avaruuden X avoin osajoukko. Koska jokainen $g \in G$ on avaruuden X homeomorfismi, on joukko

$$GU = \bigcup_{g \in G} g(U)$$

avaruuden X avoin osajoukko. Siis $p^{-1}(p(U)) = GU$ on avoin avaruudessa X, joten tekijätopologian määritelmän perusteella joukko $p(U)$ on avoin avaruudessa X/G. □

Voidaan osoittaa, että jos G on kompakti, niin kuvaus $p\colon X \to X/G$ on suljettu.

Lemma 24.12. *Olkoon G diskreetti ryhmä, joka toimii vahvasti epäjatkuvasti Hausdorffin avaruudessa X. Tällöin rata-avaruus X/G on Hausdorffin avaruus.*

Todistus. Harjoitustehtävä. □

Lause 24.13. *Olkoon G diskreetti ryhmä, joka toimii vapaasti ja vahvasti epäjatkuvasti topologisella monistolla X. Tällöin rata-avaruus X/G on topologinen monisto.*

Todistus. Lemman **??** perusteella X/G on Hausdorffin avaruus. Olkoon $p\colon X \to X/G$ luonnollinen projektio ja olkoon $\mathcal{B} = \{B_i \mid i \in I\}$ avaruuden X numeroituva kanta. Tällöin $p(\mathcal{B}) = \{p(B_i) \mid i \in I\}$ on rata-avaruuden X/G numeroituva kanta. Koska ryhmän G toiminta on vahvasti epäjatkuva, pätee seuraava tulos, jota emme todista: Jokaisella avaruuden X pisteellä x on sellainen ympäristö U_x, että $(gU_x) \cap U_x = \emptyset$ kaikilla $g \in G \setminus \{e\}$. Tällöin rajoittuma $p|U_x \to p(U_x)$ on homeomorfismi. □

Sileille eli C^∞-monistoille on voimassa vastaava tulos:

Lause 24.14. *Olkoon G diskreetti ryhmä, joka toimii sileästi, vapaasti ja vahvasti epäjatkuvasti sileällä monistolla X. Tällöin rata-avaruus X/G on sileä monisto.*

Todistus. Kuten Lauseen **??** todistus. □

Lauseen **??** oletus, että ryhmän toiminta on vapaa voidaan korvata oletuksella, että toiminta on tehokas. Tällöin rata-avaruudessa on ”teräviä kärkiä”, joten se ei enää ole sileä monisto. Tällaisesta rata-avaruudesta käytetään englanniksi nimitystä *orbifold*.

Jos Fuchsin ryhmä Γ toimii vapaasti ylemmässä puolitasossa, on rata-avaruus $\mathbb{H}/\Gamma$ 2-ulotteinen *hyperbolinen monisto* eli *hyperbolinen pinta*. Jos toiminta ei ole vapaa, on se kuitenkin tehokas ja tällöin rata-avaruus $\mathbb{H}/\Gamma$ on 2-ulotteinen hyperbolinen orbifold.

Esimerkki 24.15. Ryhmä $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ toimii avaruudessa $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ seuraavasti:

$$(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}) \times (\mathbb{R} \times \mathbb{R}) \to (\mathbb{R} \times \mathbb{R}), \ \ ((n, m), (x, y)) \mapsto (x + n, y + m).$$

Rata-avaruus on torus

$$T^2 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 = (\mathbb{R} \times \mathbb{R})/(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}).$$

Ryhmä $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ on Abelin ryhmä, mutta ei syklinen ryhmä, joten se ei ole Fuchsin ryhmä. Siis torus ei ole hyperbolinen pinta.

Lisää tekstiä tulossa.....