Homotopiateoria

Erik Elfving

Syksy 2015

1 Homotopiateorian peruskäsitteet

1.1 Homotopia

[Väisälä, Topologia II, Limes ry, 2005, s. 150–180].
Jatkossa viittaamme tämän kirjan lauseisiin V: xx.yy.

1.2 Perusryhmä: sovelluksia ja esimerkkejä

Seuraavalle n.s. *algebran peruslauseelle* on olemassa lukuisia todistuksia, joista eräs saadaan homotopiateorian perustulosten avulla. Tarvitsemme ensin yhden lemman.

Lemma 1.1 *Olkoon $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq 1$. Tällöin funktio*

$$\varphi\colon S^1 \to S^1,\ \varphi(z) = z^n,$$

ei ole nollahomotooppinen.

Todistus. Antiteesi: $\varphi \simeq c$. Koska S^1 on polkuyhtenäinen, voidaan olettaa, että $\varphi \simeq c_1$, missä c_1 on vakiofunktio $c_1(z) \equiv 1$. Harjoitustehtävän V: 21:16 nojalla on olemassa homotopia $H\colon \varphi \simeq c_1$ rel 1. Tarkastellaan sitten silmukkaa

$$\gamma\colon I \to S^1,\ \gamma(s) = e^{2\pi is}.$$

Nyt $\varphi \circ \gamma$ on silmukka $s \mapsto e^{2\pi nis}$ ja

$$I \times I \xrightarrow{\gamma\times\mathrm{id}} S^1 \times I \xrightarrow{H} S^1$$

on polkuhomotopia $\varphi \circ \gamma \sim c_1$ (tarkista!), mikä on ristiriita Lauseen V: 25.2 kanssa. $\square$

Teoreema 1.2 *(Algebran peruslause) Jokaisella kompleksilukukertoimisella polynomilla, joka ei ole vakio, on juuri $\mathbb{C}$:ssä. Siis: jos*

$$P(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_{n-1} z^{n-1} + z^n,$$

$n > 0$, $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{C}$, *niin on olemassa $z_0 \in \mathbb{C}$ siten, että $P(z_0) = 0$.*

Todistus. Antiteesi: P:llä ei ole juurta; tällöin P määrittelee jatkuvan funktion

$$f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

Merkitään $\mu = |a_0| + |a_1| + ... + |a_{n-1}| + 1 \in \mathbb{R}$ ja olkoon $z \in S^1$. Nyt

$$|f(\mu z) - \mu^n z^n| = |a_0 + a_1\mu z + ... + a_{n-1}\mu^{n-1}z^{n-1} + \mu^n z^n - \mu^n z^n|$$

$$\leq |a_0| + \mu|a_1| + ... + \mu^{n-1}|a_{n-1}| \leq \mu^{n-1}(|a_0| + |a_1| + ... + |a_{n-1}|)$$
$$< \mu^n = |\mu^n z^n|.$$

Epäyhtälöketjun 3. välivaiheessa käytettiin tietoa $\mu \geq 1$, 4. välivaiheessa luvun μ määritelmää ja viimeisessä sitä että $z \in S^1$.
Siis jokaisella $z \in S^1$ pätee: pisteestä $f(\mu z)$ pisteeseen $\mu^n z^n$ piirretty jana ei sisällä origoa, joten voidaan määritellä homotopia

$$H\colon S^1 \times I \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

kaavalla $H(z,t) = (1-t)f(\mu z) + t\mu^n z^n$. Arvolla $t = 0$ saadaan funktio $z \mapsto f(\mu z)$ ja arvolla $t = 1$ funktio $g\colon z \mapsto \mu^n z^n$.
Funktio $z \mapsto f(\mu z)$ on nollahomotooppinen:

$$(z,t) \mapsto f((1-t)\mu z) \in \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

Siis myös $g\colon S^1 \to \mathbb{C}\setminus\{0\}$ on nollahomotooppinen. Yhdistetään g retraktioon $r\colon \mathbb{C} \setminus \{0\} \to S^1,\ z \mapsto z/|z|$, ja saadaan $r \circ g\colon S^1 \to S^1$:

$$z \mapsto \frac{\mu^n z^n}{|\mu^n z^n|} = \frac{\mu^n z^n}{\mu^n |z^n|} = \frac{z^n}{|z^n|} = z^n.$$

Edellä 1. välivaiheessa käytettiin tietoa, että μ on positiivinen reaaliluku ja viimeisessä välivaiheessa sitä, että $z \in S^1$. Koska funktio g on nollahomotooppinen, niin myös $r \circ g$ on nollahomotooppinen, mikä on ristiriita y.o. lemman nojalla. □

Seuraavaksi tutkimme pallojen S^n yhdesti yhtenäisyyttä.

Lause 1.3 *Pallot S^n, $n \geq 1$, ovat polkuyhtenäisiä.*

Todistus. [Väisälä: Topologia I], Lause 14.28.5. □

Ympyrä S^1 ei ole yhdesti yhtenäinen (V: 24.12.2). Osoitamme seuraavaksi, että pallot S^n, $n \geq 2$, ovat yhdesti yhtenäisiä. Ensin yleisempi tulos:

Lause 1.4 *(Seifert-van Kampen) Olkoon $X = X_1 \cup X_2$, missä $X_1, X_2 \subset X$ ovat avoimia ja yhdesti yhtenäisiä ja $X_1 \cap X_2$ on polkuyhtenäinen. Olkoon kantapiste $x_0 \in X_1 \cap X_2$. Tällöin X on yhdesti yhtenäinen.*

Todistus. Y.o. oletuksilla avaruus X on polkuyhtenäinen.
Olkoon $\alpha \in \Omega(X, x_0)$. Nyt $\{\alpha^{-1}(X_1), \alpha^{-1}(X_2)\}$ on välin I avoin peite, joten sillä on Lebesguen luku $\lambda > 0$ siten, että jokainen I:n osaväli J, jonka pituus on $< \lambda$, sisältyy jompaankumpaan joukoista $\alpha^{-1}(X_1)$, $\alpha^{-1}(X_2)$.
Valitaan nyt $n \in \mathbb{N}$ siten, että $\frac{1}{n} < \lambda$ ja tarkastellaan I:n jakoa

$$0 < \frac{1}{n} < \frac{2}{n} < \cdots < \frac{n-1}{n} < 1.$$

Tällöin jokaisella k pätee: $\alpha[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}] \subset X_1$ tai X_2. Jättämällä tarvittaessa pois jakopisteitä saadaan jako $0 < t_0 < t_1 < ... < t_m = 1$ siten, että $\alpha[t_{i-1}, t_i]$ ja $\alpha[t_i, t_{i+1}]$ sisältyvät aina eri joukkoihin X_1, X_2. Tällöin $\alpha(t_i) \in X_1 \cap X_2$ jokaisella i.
Jokaisella $0 < i < m$ valitaan polku $\beta_i \colon I \to X_1 \cap X_2$ pisteestä x_0 pisteeseen $\alpha(t_i)$. Merkitään $\alpha_i \colon I \to X$ polkua $\alpha|[t_{i-1}, t_i]$ yksikkövälille parametrisoituna. Tällöin

$$\alpha \sim \alpha_1\alpha_2...\alpha_m \sim (\alpha_1\beta_1^{\leftarrow})(\beta_1\alpha_2\beta_2^{\leftarrow})\cdots(\beta_{m-1}\alpha_m).$$

Jokainen osasilmukka viimeisessä lausekkeessa on $\sim \epsilon_{x_0}$, koska ne ovat X_1:n tai X_2:n silmukoita ja X_1, X_2 ovat yhdesti yhtenäisiä. Siis $\alpha \sim \epsilon_{x_0}$ ja $\pi(X, x_0) = 0$. Seurauksen V:23.7 nojalla X on yhdesti yhtenäinen. $\square$

Huomautus 1.5 *Yleinen Seifertin-van Kampenin lause kertoo, miten ryhmä $\pi(X, x_0)$ lasketaan ryhmien $\pi(X_1, x_0)$, $\pi(X_2, x_0)$ ja $\pi(X_1 \cap X_2, x_0)$ avulla, kun $X_1, X_2 \subset X$ ovat avoimia ja polkuyhtenäisiä ja $X_1 \cap X_2$ on polkuyhtenäinen.*

Pallon S^n käsittelyyn käytämme kahta standardikuvausta: Ensiksi

$$\pi \colon (\bar{B}^n, S^{n-1}) \to (S^n, e_{n+1}),$$

joka on määritelty kaavalla

$$\pi(y) = (2\sqrt{1 - |y|^2}y, 2|y|^2 - 1) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^{n+1},$$

missä $e_{n+1} = (0, ..., 0, 1) \in \mathbb{R}^{n+1}$. Se toteuttaa $|\pi(y)| = 1$ ja $\pi^{-1}(e_{n+1}) = S^{n-1}$.

Rajoittuma avoimelle kuulalle on homeomorfismi

$$B^n \to S^n \setminus \{e_{n+1}\}$$

käänteiskuvauksenaan $\rho\colon S^n \setminus \{e_{n+1}\} \to B^n$,

$$\rho(z,t) = \frac{z}{\sqrt{2(1-t)}},$$

missä $(z,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$.
Kuvaus π indusoi siis jatkuvan bijektion $\overline{\pi}\colon \bar{B}^n/S^{n-1} \to S^n$ (kanoninen hajotelma)

$$\begin{tikzcd}
\bar{B}^n \arrow[r, "\pi"] \arrow[d] & S^n \\
\bar{B}^n/S^{n-1} \arrow[ur, "\overline{\pi}"'] &
\end{tikzcd}$$

Koska $\bar{B}^n$ on kompakti ja S^n Hausdorff, niin π on samastuskuvaus (V: 15.16), joten Lauseen V: 9.10 nojalla $\overline{\pi}$ on homeomorfismi.
Toinen standardikuvaus on homeomorfismi

$$\pi'\colon B^n \to \mathbb{R}^n,\ \pi'(y) = \frac{y}{1-|y|}$$

käänteiskuvauksenaan

$$\rho'\colon \mathbb{R}^n \to B^n,\ \rho'(z) = \frac{z}{1+|z|}.$$

Yhdistämällä homeomorfismit $(\pi|)^{-1}$ ja π' saadaan homeomorfismi

$$S^n \setminus \{e_{n+1}\} \to B^n \to \mathbb{R}^n.$$

Lause 1.6 *Pallo S^n on yhdesti yhtenäinen, kun $n \geq 2$.*

Todistus. $S^n = U_1 \cup U_2$, missä $U_1 = S^n \setminus \{e_{n+1}\}$ ja $U_2 = S^n \setminus \{-e_{n+1}\}$ ovat avoimia ja $U_1 \approx U_2 \approx \mathbb{R}^n$ kuten edellä. Lauseen 1.3 nojalla S^n on polkuyhtenäinen. Koska $\mathbb{R}^n$ on yhdesti yhtenäinen, ovat U_1 ja U_2 yhdesti yhtenäisiä ja lisäksi leikkaus $U_1 \cap U_2 \approx S^{n-1} \times (-1,1)$ on polkuyhtenäinen, kun $n \geq 2$ (HT). Lauseen 1.4 nojalla $\pi(S^n, x_0) = 0$ kaikilla $x_0 \in S^n \setminus \{e_{n+1}, -e_{n+1}\}$, joten Seurauksen V:23.7 nojalla S^n on yhdesti yhtenäinen. $\square$

Esimerkki 1.7 *Torus* $T^n = (S^1)^n$, $n \geq 2$.

Koska $\pi(S^1) \cong (\mathbb{Z}, +)$, saadaan suoraan harjoitustehtävästä V: 23:4, että

$$\pi(T^2) = \pi(S^1 \times S^1) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z},$$

missä laskutoimituksen antaa kaava $(m, n) + (m', n') = (m + m', n + n')$. Induktiolla

$$\pi(T^n) \cong \bigoplus_{i=1}^{n} \mathbb{Z}.$$

Tässä siis perusryhmä on Abelin ryhmä. Vertaa tätä Esimerkin V: 25.5 tilanteeseen, jossa perusryhmä ei ole Abelin ryhmä. Esimerkin V: 25.5 avaruuden perusryhmä on n.s. kahden alkion virittämä vapaa ryhmä, kun taas toruksen T^2 perusryhmä on n.s. kahden alkion virittämä vapaa Abelin ryhmä.

Esimerkki 1.8 *Projektiivinen avaruus* P^n, $n \geq 1$.

Kts. Esimerkki V: 9.5: n-pallolla S^n määritellään ekvivalenssirelaatio, jonka luokat ovat kaksiot $\{x, -x\}$, $x \in S^n$. Tekijäavaruus $P^n = S^n/R$ on *n-ulotteinen projektiivinen avaruus.* Merkitään projektiota $p\colon S^n \to P^n$, joka on peitekuvaus (HT).
Huom. Arvolla $n = 1$ on $P^1 \approx S^1$.
Olkoon nyt $n \geq 2$ ja $y_0 \in P^n$.
Koska S^n on yhdesti yhtenäinen (Lause 1.6), antaa Lause V: 24.9 bijektion $\pi(P^n, y_0) \to p^{-1}\{y_0\}$, joka on kahden alkion joukko. Koska jokainen kahden alkion ryhmä on $\cong (\mathbb{Z}_2, +)$, on siis

$$\pi(P^n, y_0) \cong (\mathbb{Z}_2, +), \quad \text{kun } n \geq 2.$$

Siis avaruudessa P^n on silmukka α, jolle $\alpha \not\sim \epsilon$, mutta $\alpha\alpha \sim \epsilon$ (yllättävää?).
Havainnollistus: Olkoon γ polku pisteestä x_0 pisteeseen $-x_0$ ja γ' polku pisteestä $-x_0$ pisteeseen x_0 kuten kuvassa 1. Merkitään $y_0 = p(x_0) = p(-x_0)$.
Määritellään $\alpha = p \circ \gamma$. Koska $p(x_0) = p(-x_0)$, on α silmukka avaruudessa P^2.
Koska γ on α:n nosto ja ϵ_{x_0} on ϵ_{y_0}:n nosto ja $\gamma(1) \neq \epsilon_{x_0}(1)$, on Lauseen V: 24.7 nojalla $\alpha \not\sim \epsilon_{y_0}$.
Nyt $p \circ \gamma = p \circ \gamma'$, joten $p \circ (\gamma\gamma') = (p \circ \gamma)(p \circ \gamma') = \alpha\alpha$. Toisaalta $\gamma\gamma' \sim \epsilon_{x_0}$, joten $\alpha\alpha \sim \epsilon_{y_0}$.

2 Peiteavaruuksien luokittelu

Tarkastelemme mm. seuraavaa kysymystä: Olkoon Y topologinen avaruus. Onko mahdollista "luokitella" kaikki peitekuvaukset, joissa Y on maaliavaruutena, eli *kanta-avaruutena*?
Esimerkiksi tapauksessa $Y = S^1$ aiemmin ovat olleet esillä peitekuvaukset $\mathbb{R} \to S^1$, $t \mapsto e^{2\pi it}$ sekä $S^1 \to S^1$, $z \mapsto z^n$, $n = 1, 2, ...$ Kysymys: Onko olemassa oleellisesti erilaisia peitekuvauksia kanta-avaruutena S^1?
Ensiksi on määriteltävä, milloin kaksi peiteavaruutta ovat oleellisesti samat eli isomorfiset.

Määritelmä 2.1 *Olkoot* (X_1, p_1), (X_2, p_2) *peiteavaruuksia samalle kanta-avaruudelle* Y*. Jatkuvaa kuvausta* $h\colon X_1 \to X_2$ *sanotaan peiteavaruuksien* (X_1, p_1) *ja* (X_2, p_2) *väliseksi* (homo)morfismiksi*, jos* $p_2 \circ h = p_1$*:*

$$\begin{tikzcd} X_1 \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "p_1"'] & & X_2 \arrow[dl, "p_2"] \\ & Y & \end{tikzcd}$$

Peiteavaruuksien välistä homomorfismia, joka on myös homeomorfismi, sanotaan isomorfismiksi*, ja k.o. peiteavaruuksia keskenään* isomorfisiksi.

Esimerkki 2.2 *1.*

$$\begin{tikzcd} S^1 \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "p_1"'] & & S^1 \arrow[dl, "p_2"] \\ & S^1 & \end{tikzcd}$$

missä $p_1(z) = z^6$, $p_2(z) = z^3$ *ja* $f(z) = z^2$*. Kuvaus* f *on peiteavaruuksien välinen homomorfismi, mutta ei isomorfismi.*

2.

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R} \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "p_1"'] & & A \arrow[dl, "p_2"] \\ & S^1 & \end{tikzcd}$$

missä $A = \{(\cos t, \sin t, t) \mid t \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^3$, $p_1(t) = e^{2\pi it} = (\cos t, \sin t)$, f *on homeomorfismi* $t \mapsto (\cos t, \sin t, t)$ *ja* p_2 *on projektion* $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $(x, y, z) \mapsto (x, y)$*, rajoittuma. Tässä* f *on siis isomorfismi.*

Tarvitsemme jatkossa seuraavia algebran käsitteitä:
Olkoon G ryhmä, $H \leq G$ (H on G:n aliryhmä) ja $g \in G$. Tällöin G:n osajoukko

$$g^{-1}Hg = \{g^{-1}hg \mid h \in H\}$$

on myös G:n aliryhmä (HT).
Jos G on Abelin ryhmä, on aina $g^{-1}Hg = H$; tämä ei päde yleisesti. Aliryhmiä $g^{-1}Hg,\ g \in G$, sanotaan H:n konjugaateiksi ja niiden muodostamaa joukkoa H:n konjugaatioluokaksi

$$[H] = \{g^{-1}Hg \mid g \in G\}.$$

Huom. Koska $e^{-1}He = H$ (missä e on ryhmän G neutraalialkio), niin $H \in [H]$.

Lause 2.3 *Olkoon $p\colon X \to Y$ peitekuvaus. Oletetaan, että X on polkuyhtenäinen (jolloin myös Y on). Olkoon $y_0 \in Y$. Tällöin ryhmät $p_*\pi(X, x)$, missä x käy läpi joukon $p^{-1}(y_0)$, muodostavat konjugaatioluokan ryhmässä $\pi(Y, y_0)$.*

Todistus. On osoitettava kaksi asiaa:
1. Jos $x_1, x_2 \in p^{-1}(y_0)$, niin aliryhmät $p_*\pi(X, x_1)$ ja $p_*\pi(X, x_2)$ ovat konjugoituja ryhmässä $\pi(Y, y_0)$, t.s. että on olemassa alkio $g \in \pi(Y, y_0)$, jolle

$$p_*\pi(X, x_2) = g^{-1}(p_*\pi(X, x_1))g.$$

2. Jos $H \leq \pi(Y, y_0)$ on konjugoitu aliryhmän $p_*\pi(X, x_1)$ kanssa, niin on olemassa $x_2 \in p^{-1}(y_0)$, jolle

$$H = p_*\pi(X, x_2).$$

Väitteen 1 todistus: Olkoot $x_1, x_2 \in p^{-1}(y_0)$, ja valitaan polku $\rho\colon I \to X,\ \rho(0) = x_1,\ \rho(1) = x_2$. Lauseen V: 23.6 nojalla

$$\rho_\sharp\colon \pi(X, x_1) \to \pi(X, x_2)$$

$$\overline{\alpha} \mapsto \overline{\rho^{\leftarrow}\alpha\rho}$$

on isomorfismi; erityisesti $\pi(X, x_2) = \rho_\sharp\pi(X, x_1)$, joten $p_*\pi(X, x_2) = p_*\rho_\sharp\pi(X, x_1)$.
Nyt kuitenkin, jos $\overline{\alpha} \in \pi(X, x_1)$, on

$$p_*\rho_\sharp(\overline{\alpha}) = \overline{p \circ \rho^{\leftarrow}} \cdot \overline{p \circ \alpha} \cdot \overline{p \circ \rho}.$$

Koska $p(x_1) = p(x_2) = y_0$, niin y.o. kaavassa esiintyvät kolme homotopialuokkaa ovat perusryhmän $\pi(Y, y_0)$ alkioita. Siis saadaan, että

$$p_*\pi(X, x_2) = p_*\rho_\sharp\pi(X, x_1) = \overline{p \circ \rho}^{\leftarrow}(p_*\pi(X, x_1))\overline{p \circ \rho},$$

eli konjugoivaksi alkioksi g voidaan valita $\overline{p \circ \rho} \in \pi(Y, y_0)$.
Väitteen 2 todistus: Olkoon $H \leq G$ ja $\overline{\rho} \in \pi(Y, y_0)$ alkio, jolle

$$H = \overline{\rho}^{-1} p_*\pi(X, x_1)\overline{\rho}.$$

Merkitään symbolilla $\tilde{\rho}$ polun ρ nostoa, jolle $\tilde{\rho}(0) = x_1$. Merkitään lisäksi $x_2 = \tilde{\rho}(1) \in p^{-1}(y_0)$. Kuten todistuksen kohdassa 1 saadaan

$$p_*\pi(X, x_2) = \overline{p \circ \tilde{\rho}}^{\leftarrow}(p_*\pi(X, x_1))\overline{p \circ \tilde{\rho}}$$

$$= \overline{\rho}^{\leftarrow}(p_*\pi(X, x_1))\overline{\rho} = H.$$

Todistuksen kohdan 1 polkua ρ vastaa tässä $\tilde{\rho}$. Siis $p_*\pi(X, x_2) = H$. $\square$

Määritelmä 2.4 *Aliryhmien konjugaatioluokkaa*

$$\{p_*\pi(X, x) \mid x \in p^{-1}(y_0)\}$$

kuten edellä sanotaan peiteavaruuden (X, p) määräämäksi konjugaatioluokaksi.

Lause 2.5 *Olkoot (X_1, p_1), (X_2, p_2) peiteavaruuksia avaruudelle Y; X_1, X_2 yhtenäisiä ja lokaalisti polkuyhtenäisiä. Tällöin (X_1, p_1) ja (X_2, p_2) ovat isomorfisia jos ja vain jos jokaiselle kahdelle pisteelle $x_1 \in X_1$, $x_2 \in X_2$ siten, että $p_1(x_1) = p_2(x_2) \in Y$ pätee: aliryhmät $(p_1)_*\pi(X_1, x_1)$ ja $(p_2)_*\pi(X_2, x_2)$ ovat konjugoituja ryhmässä $\pi(Y, p_1(x_1))$.*

Ennen tämän päätuloksen todistamista käymme läpi muutamia aputuloksia. Palautetaan mieleen, että avaruus X on *lokaalisti polkuyhtenäinen*, jos jokaisella $x \in X$ ja jokaisella x:n ympäristöllä U on olemassa x:n polkuyhtenäinen ympäristö $V \subset U$.

Lause 2.6 *Avaruus X on lokaalisti polkuyhtenäinen jos ja vain jos X:n jokaisen avoimen osajoukon jokainen polkukomponentti on avoin.*

Todistus. HT. $\square$

Lause 2.7 *Olkoon (X,p) peiteavaruus avaruudelle Y ja Z avaruus. Jos $f,g\colon Z \to X$ ovat jatkuvia funktioita joille $p \circ f = p \circ g$, niin joukko*

$$A = \{z \in Z \mid f(z) = g(z)\}$$

on avoin ja suljettu Z:ssa (tässä lauseessa ei tarvita oletuksia polkuyhtenäisyydestä tai lokaalista polkuyhtenäisyydestä).

Todistus. 1. A on avoin: Olkoon $x \in A$. Valitaan pisteelle $pf(x) \in Y$ peiteympäristö V, $p^{-1}V = \cup_{j\in J} U_j$ kuten määritelmässä. Olkoon U_{j_0} se joukoista U_j, joka sisältää pisteen $f(x)$. Nyt $U_{j_0} \subset X$ on avoin, joten $f^{-1}U_{j_0}, g^{-1}U_{j_0} \subset Z$ ovat avoimia. Koska $f(x) \in U_{j_0}$ ja $f(x) = g(x)$, on $x \in f^{-1}U_{j_0} \cap g^{-1}U_{j_0}$, joka on avoin Z:ssa. Siis riittää osoittaa, että

$$f^{-1}U_{j_0} \cap g^{-1}U_{j_0} \subset A.$$

Olkoon $t \in f^{-1}U_{j_0} \cap g^{-1}U_{j_0}$. Nyt $f(t) \in U_{j_0}$ ja $g(t) \in U_{j_0}$ ja lisäksi $pf(t) = pg(t)$. Koska $p|\colon U_{j_0} \to V$ on bijektio, on välttämättä $f(t) = g(t)$. Siis $t \in A$.
2. A on suljettu (huom. jos oletettaisiin, että X on Hausdorff, tämä olisi selvä): Antiteesi: A ei ole suljettu, jolloin on olemassa alkio $z \in \overline{A}\setminus A$. Tällöin siis $f(z) \neq g(z)$. Olkoon V pisteen $pf(z) = pg(z) \in Y$ peiteympäristö, $p^{-1}V = \cup_{j\in J} U_j$. Koska $f(z) \neq g(z)$, ne kuuluvat eri joukkoihin U_j, olkoon $f(z) \in U_{j_1}$, $g(z) \in U_{j_2}$, $j_1 \neq j_2$. Nyt $z \in f^{-1}U_{j_1} \cap g^{-1}U_{j_2} \Subset Z$, joten on olemassa $t \in A \cap f^{-1}U_{j_1} \cap g^{-1}U_{j_2}$. Mutta nyt $f(t) = g(t)$ (koska $t \in A$), $f(t) \in U_{j_1}$, $g(t) \in U_{j_2}$ ja $U_{j_1} \cap U_{j_2} = \emptyset$, mikä on ristiriita. □

Korollaari 2.8 *Olkoon (X,p) peiteavaruus avaruudelle Y ja Z yhtenäinen avaruus. Olkoot $f,g\colon Z \to X$ jatkuvia funktioita, joille $p \circ f = p \circ g$. Jos $f(z) = g(z)$ jollakin $z \in Z$, niin $f = g$.*

Todistus. Joukko $\{z \in Z \mid f(z) = g(z)\}$ on edellisen lauseen nojalla avoin ja suljettu, joten se on välttämättä $\emptyset$ tai Z (koska Z on yhtenäinen). Oletuksen nojalla se ei ole tyhjä, mistä väite seuraa. □

Aiemmin olemme todistaneet polun- ja homotopiannostoon liittyviä tuloksia. Seuraavaksi tarkastelemme yleisempää tilannetta:

$$\begin{array}{ccc} & & (X,x_0) \\ & \overset{\tilde{f}}{\nearrow} & \big\downarrow p \\ (Z,z_0) & \xrightarrow[f]{} & (Y,y_0), \end{array}$$

missä p on peitekuvaus.
Aina tällaista nostoa ei ole olemassa, esimerkiksi

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{R} \arrow[d, "p"'] \\ S^1 \arrow[r, "\mathrm{id}"'] & S^1, \end{tikzcd}$$

missä p on funktio $t \mapsto e^{2\pi it}$.
Eräs välttämätön ehto noston olemassaololle saadaan tarkastelemalla perusryhmiä: Oletetaan, että y.o. kaaviossa nosto $\tilde{f}$ on olemassa. Tällöin saadaan

$$\begin{tikzcd} & \pi(X,x_0) \arrow[d, "p_*"'] \\ \pi(Z,z_0) \arrow[ur, "\tilde{f}_*"] \arrow[r, "f_*"'] & \pi(Y,y_0). \end{tikzcd}$$

Jos $\bar{\alpha} \in f_*\pi(Z,z_0)$, niin $\bar{\alpha} \in p_*(\tilde{f}_*\pi(Z,z_0)) \subset p_*\pi(X,x_0)$, joten

$$f_*\pi(Z,z_0) \subset p_*\pi(X,x_0).$$

Osoittautuu, että tämä ehto on myös riittävä.

Lause 2.9 *Olkoon $p\colon (X,x_0) \to (Y,y_0)$ peitekuvaus, Z yhtenäinen ja lokaalisti polkuyhtenäinen (jolloin Z on myös polkuyhtenäinen) ja $z_0 \in Z$. Kuvauksella $f\colon (Z,z_0) \to (Y,y_0)$ on olemassa nosto $\tilde{f}\colon (Z,z_0) \to (X,x_0)$ jos ja vain jos $f_*\pi(Z,z_0) \subset p_*\pi(X,x_0)$.*

Todistus. "$\Rightarrow$" edellä.
"$\Leftarrow$" Lauseen V:13.27 nojalla Z on polkuyhtenäinen.
Seuraava tarkastelu osoittaa, että on vain yksi tapa määritellä funktio $\tilde{f}$: Oletetaan, että funktio $\tilde{f}$ on olemassa. Olkoon $z \in Z$. Koska Z on polkuyhtenäinen, on olemassa polku $\alpha\colon I \to Z$, $\alpha(0) = z_0$, $\alpha(1) = z$. Nyt $f \circ \alpha$ on polku Y:ssä, $\tilde{f}\circ\alpha$ on polku X:ssä, $\tilde{f}\circ\alpha$ on polun $f\circ\alpha$ nosto ja $\tilde{f}(z) = (\tilde{f}\circ\alpha)(1)$ on polun $\tilde{f} \circ \alpha$ päätepiste.
Määritellään $\tilde{f}$ käyttäen edellä esitettyä ideaa: Olkoon $z \in Z$. Valitaan polku $\alpha_z\colon I \to Z$, $\alpha_z(0) = z_0$, $\alpha_z(1) = z$. Tällöin $f \circ \alpha_z$ on polku Y:ssä, $f \circ \alpha_z(0) = y_0$. Lauseen V:24.5 nojalla polulla $f \circ \alpha_z$ on yksikäsitteinen nosto $g\colon I \to X$, jolle $g(0) = x_0$. Siis $p \circ g = f \circ \alpha_z$.

Määritellään nyt $\tilde{f}(z) = g(1) \in X$. Merkitään $g = (f\alpha_z)'$.
Osoitetaan, että $\tilde{f}$ on hyvin määritelty ja jatkuva.

1) Jos β on toinen polku pisteestä z_0 pisteeseen z, niin $\alpha\beta^{\leftarrow}$ on z_0-kantainen silmukka. Siis $\overline{\alpha\beta^{\leftarrow}} \in \pi(Z, z_0)$, ja oletuksen nojalla

$$f_*(\overline{\alpha\beta^{\leftarrow}}) \in p_*\pi(X, x_0).$$

Siis on olemassa $\bar{\gamma} \in \pi(X, x_0)$ siten, että $p_*(\bar{\gamma}) = f_*(\overline{\alpha\beta^{\leftarrow}}) = \overline{(f \circ \alpha)(f \circ \beta^{\leftarrow})}$, mistä seuraa, että $p \circ \gamma \sim (f \circ \alpha)(f \circ \beta^{\leftarrow})$ Y:ssä. Olkoon H vastaava homotopia ja

$$\tilde{H}: \widetilde{p \circ \gamma} \sim \widetilde{(f \circ \alpha)(f \circ \beta^{\leftarrow})}$$

H:n nosto, jolle $\tilde{H}(0,0) = x_0$. Huomataan, että $\widetilde{p \circ \gamma} = \gamma$ ja merkitään $\widetilde{(f \circ \alpha)(f \circ \beta^{\leftarrow})} = \gamma'$.
Siis $p \circ \gamma' = (f \circ \alpha)(f \circ \beta^{\leftarrow})$. Määritellään $\alpha': I \to X$ kaavalla $\alpha'(t) = \gamma'(t/2)$, $t \in I$ ja $\beta': I \to X$ kaavalla $\beta'(t) = \gamma'(1 - (t/2))$, $t \in I$. Nyt $(p \circ \alpha')(t) = p(\gamma'(t/2)) = (f \circ \alpha)(t)$ ja $(p \circ \beta')(t) = p \circ \gamma'(1 - (t/2)) = (f \circ \beta)(t)$. Koska $\alpha'(0) = \beta'(0) = x_0$, α' ja β' ovat polkujen $f \circ \alpha$ ja $f \circ \beta$ yksikäsitteiset pisteestä x_0 alkavat nostot. Siis

$$\widetilde{f \circ \alpha}(1) = \alpha'(1) = \gamma'(1/2) \text{ ja } \widetilde{f \circ \beta}(1) = \beta'(1) = \gamma'(1/2).$$

Siis nostot päättyvät samaan pisteeseen $\gamma'(1/2)$, joten $\tilde{f}$:n määritelmä ei riipu polun valinnasta.

2) Jatkuvuus: Olkoon $z \in Z$ ja $V \subset X$ pisteen $\tilde{f}(z)$ ympäristö. On siis löydettävä pisteen z ympäristö U siten, että $\tilde{f}(U) \subset V$. Valitaan $\tilde{f}(z)$:n ympäristö $W \subset V$, jonka p kuvaa homeomorfisesti pisteen $p\tilde{f}(z) = f(z)$ ympäristölle $p(W)$ (p immersio). Koska f on jatkuva ja Z lokaalisti polkuyhtenäinen, on olemassa z:n polkuyhtenäinen ympäristö $U \subset Z$ siten että $f(U) \subset p(W)$. Osoitetaan, että $\tilde{f}(U) \subset V$:
Olkoon $z' \in U$. Valitaan U:n polku β pisteestä z pisteeseen z'. Jos α_z on polku z_0:sta pisteeseen z, on $\alpha_z\beta$ polku z_0:sta pisteeseen z', ja $f(\alpha_z\beta)$ polku pisteestä y_0 pisteeseen $f(z') \in f(U)$. Koska $p|W: W \to pW$ on homeomorfismi, on fU:n polulla $f\beta$ nosto $(p|W)^{-1}f\beta$ W:n poluksi, ja

$$(p|W)^{-1}f\beta(0) = (p|W)^{-1}f(z) = \tilde{f}(z) = (f\alpha_z)'(1),$$

joten $(f\alpha_z)'((p|W)^{-1}f\beta)$ on polun $f(\alpha_z\beta)$ nosto avaruuteen X, jonka loppupiste

$$\tilde{f}(z') \in W \subset V. \ \Box$$

Edellinen lause on hyvä esimerkki tilanteesta, jossa puhtaasti topologinen kysymys (noston olemassaolo) on ekvivalentti algebrallisen kysymyksen kanssa.

Esimerkki 2.10

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{R} \arrow[d, "p"'] \\ S^1 \arrow[r, "\mathrm{id}"'] & S^1 \end{tikzcd}$$

Tässä

$$\mathrm{id}_*(\pi(S^1, 1)) = \pi(S^1, 1) \not\subset p_*(\pi(\mathbb{R}, 0)) = 0.$$

Huomautus 2.11 *Ehto* $f_*\pi(Z, z_0) \subset p_*\pi(X, x_0)$ *on aina voimassa, jos* Z *on yhdesti yhtenäinen, t.s. nosto on aina olemassa.*

Palaamme nyt tutkimaan peiteavaruuksien homomorfismeja ja isomorfismeja.

Huomautus 2.12 *1) Kahden homomorfismin yhdiste on homomorfismi:*

$$\begin{tikzcd} X_1 \arrow[r, "h_1"] \arrow[dr, "p_1"'] & X_2 \arrow[r, "h_2"] \arrow[d, "p_2"] & X_3 \arrow[dl, "p_3"] \\ & Y & \end{tikzcd}$$

Nyt $p_3 \circ (h_2 \circ h_1) = (p_3 \circ h_2) \circ h_1 = p_2 \circ h_1 = p_1$, *joten* $h_2 \circ h_1$ *on homomorfismi, jos* h_1 *ja* h_2 *ovat.*

2)

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "\mathrm{id}"] \arrow[dr, "p"'] & & X \arrow[dl, "p"] \\ & Y & \end{tikzcd}$$

Identtinen funktio on aina isomorfismi.

Isomorfismia peiteavaruudelta itselleen sanotaan *automorfismiksi* tai *peitetransformaatioksi* (covering transformation, Deckbewegung):

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "h", "\approx"'] \arrow[dr, "p"'] & & X_2 \arrow[dl, "p"] \\ & Y & \end{tikzcd}$$

Automorfismit muodostavat ryhmän kuvausten yhdistämisen suhteen, merkitään tätä ryhmää $A(X, p)$.
Seuraavien lauseiden todistukset seuraavat helposti aiemmin todistetusta:

Lause 2.13 *Olkoot* (X_1, p_1) *ja* (X_2, p_2) *peiteavaruuksia avaruudelle* Y *ja* $x_1 \in X_1$, $x_2 \in X_2$ *pisteitä siten, että* $p_1(x_1) = p_2(x_2) \in Y$. *Oletetaan, että* X_1 *on yhtenäinen ja lokaalisti polkuyhtenäinen. Tällöin on olemassa homomorfismi* $f\colon (X_1, p_1) \to (X_2, p_2)$ *siten, että* $f(x_1) = x_2$ *jos ja vain jos* $(p_1)_*\pi(X_1, x_1) \subset (p_2)_*\pi(X_2, x_2)$.

Lause 2.14 *Olkoot* (X_1, p_1) *ja* (X_2, p_2) *peiteavaruuksia avaruudelle* Y *ja* $x_1 \in X_1$, $x_2 \in X_2$ *pisteitä siten, että* $p_1(x_1) = p_2(x_2) \in Y$. *Oletetaan, että* X_1 *ja* X_2 *ovat yhtenäisiä ja lokaalisti polkuyhtenäisiä. Tällöin on olemassa isomorfismi* $f\colon (X_1, p_1) \to (X_2, p_2)$ *siten, että* $f(x_1) = x_2$ *jos ja vain jos* $(p_1)_*\pi(X_1, x_1) = (p_2)_*\pi(X_2, x_2)$.

Myös Lause 2.5 seuraa edellä esitetystä:
Todistus. "$\Rightarrow$" Merkitään $H_1 = (p_1)_*\pi(X_1, x_1)$ ja $H_2 = (p_2)_*\pi(X_2, x_2)$. Oletetaan siis, että lauseen mukainen isomorfismi f on olemassa ja osoitetaan, että H_1 ja H_2 ovat konjugoituja ryhmässä $\pi(Y, y)$. Merkitään lisäksi $x_2' = f(x_1)$. Huom.: $x_2, x_2' \in p_2^{-1}(y)$, koska $p_2(x_2') = p_2 f(x_1) = p_1(x_1) = y$. Merkitään $H_2' = (p_2)_*\pi(X_2, x_2')$. Lauseen 2.14 nojalla on $H_1 = H_2'$. Lauseen 2.3 nojalla H_2 ja H_2' ovat konjugoituja. Siis H_1 ja H_2 ovat konjugoituja.

"$\Leftarrow$" Valitaan $y \in Y$ ja $x_1 \in X_1$, $x_2 \in X_2$ siten, että $p_1(x_1) = p_2(x_2) = y$. Merkitään H_1, H_2 kuten yllä. Oletuksen nojalla H_1 ja H_2 ovat konjugoituja ja Lauseen 2.3 nojalla on olemassa $x_2' \in p_2^{-1}(y)$ siten, että $(p_2)_*\pi(X_2, x_2') = H_1$. Nyt Lauseen 2.14 nojalla on olemassa isomorfismi $f\colon (X_1, p_1) \to (X_2, p_2)$ siten, että $f(x_1) = x_2'$. $\square$

Lause 2.15 *Olkoot* (X_1, p_1), (X_2, p_2) *peiteavaruuksia avaruudelle* Y; X_1, X_2, Y *yhtenäisiä ja lokaalisti polkuyhtenäisiä. Jos* $f\colon (X_1, p_1) \to (X_2, p_2)$ *on homomorfismi, niin* f *on peitekuvaus.*

Todistus. HT $\square$

Lauseesta 2.5 seuraa mm., että jokainen peiteavaruus ympyrälle S^1 on isomorfinen jonkin esimerkeissämme esiintyneen peiteavaruuden kanssa; yksityiskohdat HT.

Huomautus 2.16 *Olkoon (X, p) peiteavaruus avaruudelle Y, missä X on yhdesti yhtenäinen ja lokaalisti polkuyhtenäinen. Jos (X', p') on toinen peiteavaruus avaruudelle Y, niin Lauseen 2.13 nojalla on olemassa homomorfismi $f: (X, p) \to (X', p')$, ja Lauseen 2.15 nojalla f on peitekuvaus.*
Siis X on peiteavaruus mille tahansa Y:n peiteavaruudelle. Tästä syystä yhdesti yhtenäistä peiteavaruutta sanotaan universaalipeiteavaruudeksi*. Lauseen 2.5 nojalla kaksi Y:n universaalipeiteavaruutta ovat keskenään isomorfiset.*

Tämän luvun lopuksi tarkastellaan kysymystä: Minkälaisella topologisella avaruudella on olemassa universaalipeiteavaruus?
Olkoon $(\tilde{X}, p)$ yhtenäisen ja lokaalisti polkuyhtenäisen avaruuden X universaalipeiteavaruus. Valitaan lisäksi $x \in X$, $\tilde{x} \in p^{-1}(x)$, U x:n peiteympäristö ja V se joukon $p^{-1}U$ komponentti, joka sisältää pisteen $\tilde{x}$. Merkitään inkluusioita $i: U \hookrightarrow X$ ja $j: V \hookrightarrow \tilde{X}$.
Saadaan kommutoiva kaavio

$$\begin{array}{ccc} \pi(V, \tilde{x}) & \xrightarrow{j_*} & \pi(\tilde{X}, \tilde{x}) \\ {\scriptstyle (p|V)_*}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p_*} \\ \pi(U, x) & \xrightarrow{i_*} & \pi(X, x) \end{array}$$

Koska $p|V$ on homeomorfismi $V \to U$, on $(p|V)_*$ isomorfismi. Oletuksen nojalla $\pi(\tilde{X}, \tilde{x}) = 0$. Siis $p_* \circ j_*$ on nollakuvaus, joten $i_* \circ (p|V)_*$ on nollakuvaus, koska kaavio kommutoi. Koska $(p|V)_*$ on isomorfismi, on siis i_* nollakuvaus. Siis: jokaisella $x \in X$ on ympäristö U siten, että homomorfismi $\pi(U, x) \to \pi(X, x)$ on nollakuvaus, eli: jokaisella $x \in X$ on ympäristö U siten, että jokainen silmukka U:ssa on nollahomotooppinen X:ssä.

Määritelmä 2.17 *Topologinen avaruus on* semilokaalisti yhdesti yhtenäinen*, jos jokaisella $x \in X$ on ympäristö U siten, että homomorfismi $\pi(U, x) \to \pi(X, x)$ on nollakuvaus.*

Esimerkki 2.18 *Tason osajoukko*

$$X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} S((1/n, 0), 1/n)$$

ei ole semilokaalisti yhdesti yhtenäinen.

Avaruuden X kartiolle $c(X)$ sen sijaan pätee: Pisteellä $((0,0),0) \in c(X)$ on ympäristö, joka ei sisällä yhtään yhdesti yhtenäistä ympäristöä (t.s. $c(X)$ ei ole lokaalisti yhdesti yhtenäinen). Kuitenkin jokainen silmukka voidaan kutistaa $c(X)$:ssä.

Lause 2.19 *Olkoon X topologinen avaruus, joka on yhtenäinen, lokaalisti polkuyhtenäinen ja semilokaalisti yhdesti yhtenäinen. Tällöin X:llä on universaalipeiteavaruus.*
Yleisemmin: Jos $[H]$ on mikä tahansa ryhmän $\pi(X,x)$ aliryhmien konjugaatioluokka, niin on olemassa X:n peiteavaruus $(\tilde{X},p)$, jolle $p_*\pi(\tilde{X},\tilde{x}) \in [H]$. Itse asiassa jokainen peiteavaruus voidaan konstruoida universaalipeiteavaruudesta tekijäavaruutena.

Todistus. Massey: Algebraic topology, s. 173–177. □

3 Ryhmien vapaa tulo ja Seifertin-van Kampenin lause

Esimerkki 3.1 *Avaruus $S^1 \vee S^1$, kts. Kuva 2a.*
Silmukoita joukossa $S^1 \vee S^1$ ovat esim. α, β^{-1}, $\alpha^{-1}\beta$, $\beta^{-2}\alpha\beta^3\alpha^{-1}$ jne. Esimerkki kompositiosta: $(\alpha^2\beta\alpha^{-1})(\alpha\beta^{-1}\alpha^3) \sim ... \sim \alpha^5$. Voidaan osoittaa, että jokainen silmukka avaruudessa $S^1 \vee S^1$ on homotooppinen muotoa $\alpha^{k_1}\beta^{l_1}\alpha^{k_2}\beta^{l_2}...\alpha^{k_n}\beta^{k_n}$ olevan silmukan kanssa, missä $k_i, l_i \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$. Lisäksi kaksi tätä muotoa olevaa silmukkaa ovat homotooppiset jos ja vain jos eksponentit ovat täsmälleen samat (oletetaan eksponentit 0 poistetuiksi).

Määritelmä 3.2 *Olkoot G_1, G_2 ryhmiä (oletetaan $G_1 \cap G_2 = \emptyset$). Määritellään ryhmien vapaa tulo $G_1 * G_2$:*
Ryhmän alkiot ovat muotoa $x_1x_2 \cdots x_{2n}$, missä $x_1 \in G_1, x_2 \in G_2, ..., x_{2n} \in G_2$, mikään x_i ei ole neutraalialkio (paitsi mahdollisesti x_1, x_{2n}), ja $n \in \mathbb{N}$. Alkioiden tulo muodostetaan seuraavasti:

- *kirjoitetaan $(x_1 \cdots x_{2n})(y_1 \cdots y_{2n}) = x_1 \cdots x_{2n}y_1 \cdots y_{2n}$*
- *poistetaan neutraalialkiot (paitsi päistä); yhdistetään peräkkäiset alkiot, jos ne kuuluvat samaan ryhmään*
- *äärellisen monen askeleen jälkeen saadaan y.o muotoa oleva lauseke.*

Esimerkki 3.3 $\pi(S^1 \vee S^1) \cong \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$ *(todistus myöhemmin).*

Olkoon nyt $X = X_1 \cup X_2$ ja $x_0 \in X_1 \cap X_2$. Kaavio

$$\begin{tikzcd} X_1 \cap X_2 \arrow[r, "i_1"] \arrow[d, "i_2"'] & X_1 \arrow[d, "j_1"'] \\ X_2 \arrow[r, "j_2"'] & X \end{tikzcd}$$

indusoi kaavion

$$\begin{tikzcd} \pi(X_1 \cap X_2, x_0) \arrow[r, "(i_1)_*"] \arrow[d, "(i_2)_*"'] & \pi(X_1, x_0) \arrow[d, "(j_1)_*"'] \\ \pi(X_2, x_0) \arrow[r, "(j_2)_*"'] & \pi(X, x_0). \end{tikzcd}$$

Lemma 3.4 *Oletetaan, että* $X = X_1 \cup X_2$, $X_1, X_2 \Subset X$, $X_1, X_2, X_1 \cap X_2$ *ovat polkuyhtenäisiä. Tällöin aliryhmät* $(j_1)_*(\pi(X_1, x_0))$ *ja* $(j_2)_*(\pi(X_2, x_0))$ *virittävät ryhmän* $\pi(X, x_0)$ *ja inkluusioiden indusoima homomorfismi*

$$\varphi\colon \pi(X_1, x_0) * \pi(X_2, x_0) \to \pi(X, x_0)$$

$$\bar{\alpha}_1\bar{\alpha}_2) \cdots \bar{\alpha}_{2n} \mapsto (j_1)_*(\bar{\alpha}_1) \cdot (j_2)_*(\bar{\alpha}_2) \cdots (j_2)_*(\bar{\alpha}_{2n})$$

on surjektio. Vasemmanpuoleinen merkintä $\bar{\alpha}_1\bar{\alpha}_2 \cdots \bar{\alpha}_{2n}$ *tarkoittaa vapaan tulon alkiota, oikeanpuoleinen taas on tulo ryhmässä* $\pi(X, x_0)$.

Todistus. Kuten Lauseen 1.4 todistuksessa, mielivaltainen silmukka $\alpha\colon I \to X$ voidaan esittää muodossa

$$(\alpha_1\beta_1^{\to})(\beta_1\alpha_2\beta_2^{\to}) \cdots (\beta_{m-1}\alpha_m),$$

jossa joka toinen sulkulausekkeista on polku avaruudessa X_1 ja joka toinen on polku avaruudessa X_2, eli $\bar{\alpha}$ voidaan esittää ryhmän $\pi(X_1, x_0) * \pi(X_2, x_0)$ alkion muodossa. $\square$

Jos siis saamme laskettua aliryhmän $Ker(\varphi)$, niin

$$\pi(X, x_0) = \mathrm{Im}(\varphi) \cong \pi(X_1, x_0) * \pi(X_2, x_0)/\mathrm{Ker}(\varphi).$$

Määritelmä 3.5 *Olkoon G ryhmä ja $S \subset G$. Joukon S virittämä G:n normaali aliryhmä on*

$$N = \bigcap_{K \lhd G, K \supset S} K,$$

kaikkien joukon S sisältävien G:n normaalien aliryhmien leikkaus. Joukko N on G:n normaali aliryhmä (HT).

Seuraavan teoreeman todistus on pitkä, sivuutamme sen tässä. Kts. esim. [Massey, s. 113–122].

Teoreema 3.6 *(Seifert–van Kampen; 1930-l.)*
Oletetaan, että $X = X_1 \cup X_2$, $X_1, X_2 \Subset X$, $X_1, X_2, X_1 \cap X_2$ ovat polkuyhtenäisiä, ja $x_0 \in X_1 \cap X_2$. Tällöin

$$\pi(X, x_0) \cong \pi(X_1, x_0) * \pi(X_2, x_0)/N,$$

missä N on joukon $S = \{(i_1)_*(\alpha) \cdot (i_2)_*(\alpha)^{-1} \mid \alpha \in \pi(X_1 \cap X_2, x_0)\}$ virittämä normaali aliryhmä. $\square$

Huomautus 3.7 *Inkluusio "$N \subset \mathrm{Ker}(\varphi)$" on selvä.*

Korollaari 3.8 *Olkoot X, X_1, X_2, x_0 kuten yllä.*
a) Jos X_2 on yhdesti yhtenäinen, niin $(j_1)_*\colon \pi(X_1, x_0) \to \pi(X, x_0)$ on surjektio ja $\mathrm{Ker}(j_1)_*$ on aliryhmän $(i_1)_*(\pi(X_1 \cap X_2), x_0)$ virittämä normaali aliryhmä.
b) Jos $X_1 \cap X_2$ on yhdesti yhtenäinen, niin funktio

$$\pi(X_1, x_0) * \pi(X_2, x_0) \to \pi(X, x_0)$$

$$\bar{\alpha}_1 \cdots \bar{\alpha}_{2m} \mapsto (j_1)_*(\bar{\alpha}_1) \cdots (j_2)_*(\bar{\alpha}_2) \cdots (j_2)_*(\bar{\alpha}_{2m})$$

on isomorfismi.
c) Jos X_2 ja $X_1 \cap X_2$ ovat yhdesti yhtenäisiä, niin

$$(j_1)_*\colon \pi(X_1, x_0) \to \pi(X, x_0)$$

on isomorfismi. $\square$

Esimerkki 3.9 *Olkoon* $X = S^1 \vee S^1$*, merkitään* $S^1_1 \vee S^1_2$*, kts. kuva 2b. Olkoot* $X_1 = S^1_1 \vee (S^1_2 \setminus \{-1\}) \Subset X$ *ja* $X_2 = (S^1_1 \setminus \{-1\}) \vee S^1_2 \Subset X$*. Nyt inkluusio* $k_1 \colon S^1_1 \to X_1$ *on homotopiaekvivalenssi, joten* $(k_1)_*$ *on isomorfismi. Samoin* $(k_2)_*$ *on isomorfismi. Nyt* $X_1 \cap X_2$ *on kutistuva, joten se on yhdesti yhtenäinen. Siis edellisen korollaarin b)-kohdan nojalla*

$$\pi(X, x_0) \cong \pi(X_1, x_0) * \pi(X_2, x_0) \cong \pi(S^1, 1) * \pi(S^1, 1) \cong \mathbb{Z} * \mathbb{Z},$$

missä keskimmäinen isomorfismi on $((k_1)^{-1}_*, (k_2)^{-1}_*)$*.*

4 Ryhmän esittäminen virittäjien ja relaatioiden avulla

Määritellään ensin vapaan ryhmän käsite. Olkoon X mikä tahansa joukko. Valitaan mahtavuudeltaan samansuuruinen joukko, jonka leikkaus joukon X kanssa on $\emptyset$, merkitään tätä joukkoa X^{-1}. Valitaan bijektio $\varphi \colon X \to X^{-1}$ ja merkitään $\varphi(x) = x^{-1}$, $x \in X$. Merkitään myös $(x^{-1})^{-1} = x$.

Määritelmä 4.1 *Äärellinen jono* $(a_1, ..., a_n)$ *on joukon* X sana*, jos* $a_1 \in X \cup X^{-1}$ *jokaisella* i*. Kutsutaan tyhjää jonoa* tyhjäksi sanaksi*, merkitään symbolilla* 1*. Yleensä kirjoitetaan yksinkertaisemmin* $(a_1, ..., a_n) = a_1 \cdots a_n$*. Sanat* $a_1 \cdots a_n$ *ja* $b_1 \cdots b_m$ *ovat samoja jos ja vain jos* $n = m$ *ja* $a_i = b_i$ *jokaisella* i*.*
Jos $u = a_1 \cdots a_n$ *ja* $v = b_1 \cdots b_m$*, merkitään*

$$u \cdot v = a_1 \cdots a_n b_1 \cdots b_m,$$

joka on myös sana. Erityisesti $u \cdot 1 = u$ *ja* $1 \cdot u = u$*.*
Joukon X *sana on* supistetussa muodossa*, jos* x *ja* x^{-1} *eivät esiinny jonossa peräkkäin millään* $x \in X$*. (Tyhjä sana on supistetussa muodossa.)*
Merkitään $F(X)$= *joukon* X *supistetussa muodossa olevien sanojen joukko.*
Funktio $X \to F(X)$, $x \mapsto x$ *on injektio, joten voidaan ajatella* $X \subset F(X)$*.*
Sanojen tulo eli laskutoimitus joukossa $F(X)$ *määritellään seuraavasti:*
1) kirjoitetaan sanat peräkkäin
2) tehdään mahdolliset supistukset, eli poistetaan sanasta muotoa xx^{-1} *ja* $x^{-1}x$ *olevat lausekkeet*
3) äärellisen monen vaiheen jälkeen saadaan supistetussa muodossa oleva sana (mahdollisesti 1*), eli joukon* $F(X)$ *alkio.*

Lause 4.2 *Joukko $F(X)$ on ryhmä e.m. laskutoimituksen suhteen. Kun tulkitaan $X \subset F(X)$, nähdään, että X virittää ryhmän $F(X)$, eli $F(X) = \langle X \rangle$.*

Todistus. Tyhjä sana on neutraalialkio. Sanan $a_1 \cdots a_n$ käänteisalkio on $a_n^{-1} \cdots a_1^{-1}$. Liitännäisyys on melko ilmeinen, mutta todistus on työläs; sivuutamme sen tässä. Osajoukko X virittää ryhmän $F(X)$, koska jokainen $F(X)$:n alkio (joka ei ole 1) on tulo X:n alkioista ja niiden käänteisalkoista. $\square$

Sanomme ryhmää $F(X)$ joukon X *vapaaksi ryhmäksi.*

Lause 4.3 *(Vapaan ryhmän universaaliominaisuus) Olkoon F joukon X vapaa ryhmä ja $i \colon X \to F$ inkluusio. Jos G on mikä tahansa ryhmä ja $f \colon X \to G$ mikä tahansa funktio, niin on olemassa täsmälleen yksi homomorfismi $\tilde{f} \colon F \to G$, jolle $\tilde{f} \circ i = f$.*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "i"] \arrow[dr, "f"'] & F \arrow[d, "\tilde{f}"] \\ & G \end{tikzcd}$$

(Vertaa tilanteeseen: vektoriavaruudet, lineaarikuvaukset, kanta)

Todistuksen idea. Jokainen epätyhjä sana $u \in F$ voidaan kirjoittaa muodossa

$$u = x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2} \cdots x_n^{\lambda_n},$$

missä $n \in \mathbb{N}, x_i \in X$ ja $\lambda_i \in \{-1, 1\}$ jokaisella i. Määritellään

$$\tilde{f}(x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2} \cdots x_n^{\lambda_n}) = f(x_1)^{\lambda_1} f(x_2)^{\lambda_2} \cdots f(x_n)^{\lambda_n} \in G$$

ja $\tilde{f}(1_F) = 1_G$. Voidaan osoittaa, että funktiolla $\tilde{f}$ on halutut ominaisuudet. Yksikäsitteisyys: Olkoon $\hat{f}$ toinen homomorfismi, jolle $\hat{f} \circ i = f$ ja olkoon $x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2} \cdots x_n^{\lambda_n} \in F \setminus \{1\}$. Nyt

$$\begin{aligned} \hat{f}(x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2} \cdots x_n^{\lambda_n}) &= \hat{f}(x_1)^{\lambda_1} \hat{f}(x_2)^{\lambda_2} \cdots \hat{f}(x_n)^{\lambda_n} \\ &= (\hat{f} \circ i)(x_1)^{\lambda_1} (\hat{f} \circ i)(x_2)^{\lambda_2} \cdots (\hat{f} \circ i)(x_n)^{\lambda_n} \\ &= f(x_1)^{\lambda_1} f(x_2)^{\lambda_2} \cdots f(x_n)^{\lambda_n} \\ &= \tilde{f}(x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2} \cdots x_n^{\lambda_n}). \end{aligned}$$

Siis $\hat{f} = \tilde{f}$. $\square$

Korollaari 4.4 *Jokainen ryhmä G on jonkin vapaan ryhmän homomorfinen kuva. Tarkemmin: jos $G = \langle X \rangle$, niin on olemassa surjektiivinen homomorfismi $F(X) \to G$.*

Todistus. Olkoon X G:n osajoukko, joka virittää G:n (esim. $X = G$) ja $F(X)$ joukon X vapaa ryhmä. Universaaliominaisuuden nojalla inkluusiokuvaus $j\colon X \to G$ indusoi homomorfismin $f\colon F(X) \to G$, jolle $f(x) = x$. Koska $\mathrm{Im}(f)$ on ryhmän G aliryhmä, joka sisältää G:n virittäjäjoukon X, on f surjektio, eli $G = \mathrm{Im}(f)$. $\square$

Määritelmä 4.5 *Olkoon X joukko ja $Y \subset F(X)$. Oletetaan, että G on ryhmä ja*

$$G \cong F(X)/N,$$

missä N on joukon Y virittämä $F(X)$:n normaali aliryhmä. Tällöin ryhmää G kutsutaan virittäjien $x \in X$ ja relaatioiden $w \in Y$ määrittämäksi ryhmäksi. Sanomme, että ryhmällä G on esitys $\langle X \mid Y \rangle$ virittäjien ja relaatioiden avulla.

Esimerkki 4.6 *1) Jos $X = \{a\}$, $Y = \emptyset$, niin $\langle X \mid Y \rangle \cong (\mathbb{Z}, +)$.*
2) Aina jos $Y = \emptyset$, niin $\langle X \mid Y \rangle \cong F(X)$.
3) Jos $X = \{a, b\}$, $Y = \emptyset$, niin $\langle X \mid Y \rangle \cong \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$ (HT).
4) Jos $X = \{a\}$, $Y = \{a^n\}$, niin $\langle X \mid Y \rangle \cong (\mathbb{Z}_n, +)$.
5) Ryhmällä $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ on esitys $\langle a, b \mid aba^{-1}b^{-1} \rangle$. Huom. $aba^{-1}b^{-1} = e \Leftrightarrow ab = ba$.
6)

$$G = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}, \right.$$

$$\left. \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix} \right\} \cong \langle a, b \mid a^2 = b^2 = (ab)^2 \rangle = \langle a, b \mid b^{-2}a^2, (ab)^{-2}a^2 \rangle,$$

G on n.s. kvaternioryhmä.
7) Kleinin pullon perusryhmä $\cong \langle a, b \mid baba^{-1} \rangle$.

Lause 4.7 *Jokaisella ryhmällä G on esitys $\langle X \mid Y \rangle$.*

Todistus. Korollaarin 4.4 nojalla löytyy joukko X ja surjektiivinen homomorfismi $f\colon F(X) \to G$. Olkoon nyt $Y \subset \mathrm{Ker}(f)$ osajoukko, joka virittää $\mathrm{Ker}(f)$:n (esim. $Y = \mathrm{Ker}(f)$). Nyt

$$G \cong \mathrm{Im}(f) \cong F(X)/\mathrm{Ker}(f),$$

eli G:llä on esitys $\langle X \mid Y \rangle$. $\square$

Voidaan osoittaa, että jokaiselle ryhmälle G löytyy avaruus X siten, että $\pi(X) \cong G$. Tämän voi osoittaa virittäjien ja relaatioiden avulla, avaruuteen X tulee yksi ympyrä S^1 jokaista virittäjää kohti, ja relaatiot toteutetaan n.s. solunliitosoperaatiolla.
Tarkastellaan ensin liitosavaruuskonstruktiota (Kts. harjoitustehtävä V:9:8). Olkoot X, Y avaruuksia ja $X \cap Y = \emptyset$. Olkoon lisäksi $A \Subset X$ ja $f\colon A \to Y$ jatkuva. Merkitään $W = X \cup Y$ ja $Z = W/R$, missä joukossa W on erillisen yhdisteen topologia, ja ekvivalenssirelaation R luokkia ovat yksiöt $\{x\}, x \in X \setminus A$ ja joukot $f^{-1}\{y\} \cup \{y\}$, jossa $y \in Y$. Avaruus Z on *liitosavaruus*, joka on saatu ”liimaamalla X avaruuteen Y kuvauksen f avulla”. Merkitään yleensä

$$Z = X \cup_f Y.$$

Edellä mainitussa todistuksessa $X = \bar{B}^2,\ A = S^1,\ Y = \vee S^1$ yhden pisteen yhdiste ympyröistä ja kuvaus f on jonkin silmukan (tai useiden silmukoiden) λ antama kuvaus $f_\lambda\colon S^1 \to Y,\ e^{2\pi i t} \mapsto \lambda(t)$.

Esimerkki 4.8 *1) Jos $f = \mathrm{id}\colon S^1 \to S^1$, niin $\bar{B}^2 \cup_f S^1 \approx \bar{B}^2$.*
2) Projektiivinen taso $P^2 \approx \bar{B}^2 \cup_f S^1$, missä $f\colon S^1 \to S^1,\ f(z) = z^2$.
3) $\bar{B}^2 \cup_f \mathbb{R}^2$, $f\colon S^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^2$, kts. Kuva 3.
4) Torus $T^2 \approx \bar{B}^2 \cup_f (S^1 \vee S^1)$, f kuten Kuvassa 4.

Teoreema 4.9 *Olkoon G mikä tahansa ryhmä. Tällöin on olemassa topologinen avaruus X, jolle $\pi(X) \cong G$.*

Todistuksen idea. Esitetään G virittäjien ja relaatioiden avulla, $G \cong \langle A \mid B \rangle$. Määritellään

$$Y = \bigvee_{a \in A} S^1_a,$$

missä jokainen $S^1_a \approx S^1$; Y on yhden pisteen yhdiste ympyröistä, yksi jokaiselle $a \in A$. Nyt

$$\pi(Y) \cong F(A),$$

joukon A vapaa ryhmä. Jos $b = a_1^{\lambda_1} \cdots a_n^{\lambda_n} \in B$ on relaatio, missä $a_1, ..., a_n \in A$, $\lambda_1, ..., \lambda_n \in \{-1, 1\}$, muodostetaan silmukka $\alpha_b \colon I \to Y$ seuraavasti: olkoon γ_i silmukka, joka kiertää ympyrän $S^1_{a_i}$ kerran vastapäivään ($\lambda_i = 1$) tai myötäpäivään ($\lambda_i = -1$) ja olkoon α_b näiden kompositio

$$\alpha_b = \gamma_1 \cdots \gamma_n.$$

Merkitään f_b on silmukkaa α_b vastaava kuvaus $S^1 \to Y$. Liitetään avaruuteen Y 2-soluja $\bar{B}^2$ liitoskuvauksina f_b, $b \in B$, ja merkitään saatua liitosavaruutta X. Seifertin-van Kampenin lauseen avulla voidaan osoittaa, että

$$\pi(X) \cong \langle A \mid B \rangle \cong G. \ \square$$

Esimerkki 4.10 *1)*

$$\mathbb{Z}_2 \cong \langle a \mid a^2 \rangle$$

Virittäjiä on yksi, joten lähdetään liikkeelle ympyrästä S^1. Relaatiosta a^2 saatava funktio $f \colon S^1 \to S^1$ on sama kuin edellisen esimerkin kohdassa 2), eli $f(z) = z^2$. Siis liitosavaruudeksi saadaan projektiivinen taso P^2.
2)

$$\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \cong \langle a, b \mid aba^{-1}b^{-1} \rangle$$

Virittäjiä on kaksi ja liitoskuvaukseksi saadaan sama kuin edellisen esimerkin kohdassa 4). Liitosavaruudeksi saadaan torus T^2.
3) Kleinin pullo: tässä liitoskuvaus saadaan muotoa $\gamma_b\gamma_a\gamma_b\gamma_a^{\leftarrow}$ olevasta silmukasta, joten perusryhmä $\cong \langle a, b \mid baba^{-1} \rangle$.

5 Kofibraatiot

Seuraavaksi tarkastelemme n.s. homotopianjatko- ja homotopiannosto-ominaisuuksia:

$$\begin{tikzcd}
A \times 0 \arrow[r] \arrow[d] & A \times I \arrow[d] \arrow[ddr, "H"] & \\
X \times 0 \arrow[r] \arrow[drr, "f"'] & X \times I \arrow[dr, dotted, "F"] & \\
& & Y
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
X \times 0 \arrow[r, "f"] \arrow[d] & E \arrow[d, "p"] \\
X \times I \arrow[r, "H"'] \arrow[ur, dotted, "F"] & B
\end{tikzcd}$$

Olkoot X, Y topologisia avaruuksia, $A \Subset X$.

Määritelmä 5.1 *Parilla* (X, A) *on* jatko-ominaisuus *(l. laajennusominaisuus) avaruuden* Y *suhteen, jos jokaisella jatkuvalla funktiolla* $f\colon A \to Y$ *on jatkuva jatke* $g\colon X \to Y$.

Esimerkki 5.2 *Tietzen jatkolauseen nojalla: jos* X *on* T_4*-avaruus, on jokaisella parilla* (X, A) *jatko-ominaisuus suljettujen välien* $[a, b]$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, *suhteen.*

Lause 5.3 *Parilla* (X, A) *on jatko-ominaisuus kaikkien avaruuksien* Y *suhteen jos ja vain jos* A *on* X*:n retrakti.*

Todistus. "$\Rightarrow$" Jos valitaan $Y = A$, $f = \mathrm{id}\colon A \to Y$, niin f:n jatke on retraktio $X \to A$.
"$\Leftarrow$" Jos $r\colon X \to A$ on retraktio ja $f\colon A \to Y$ on jatkuva kuvaus, niin $f \circ r\colon X \to A \to Y$ on vaadittu jatke:

$$(f \circ r)(a) = f(r(a)) = f(a) \text{ kaikilla } a \in A. \ \square$$

Määritelmä 5.4 *Inkluusio* $i\colon A \to X$ *on* kofibraatio*, jos parilla* (X, A) *on homotopianjatko-ominaisuus kaikkien avaruuksien* Y *suhteen, t.s.: Jos* $f\colon X \times 0 \to Y$ *ja* $H\colon A \times I \to Y$ *ovat mitkä tahansa jatkuvat funktiot, joille pätee* $f(a, 0) = H(a, 0)$ *jokaisella* $a \in A$*, niin on olemassa homotopia* $F\colon X \times I \to Y$*, jolle* $F|X \times 0 = f$ *ja* $F|A \times I = H$ *(kts. ylläoleva kaavio).*
A *on* X*:n* vahva deformaatioretrakti*, jos on olemassa jatkuva* $r\colon X \to A$ *siten, että* $r \circ i = \mathrm{id}_A$ *ja* $i \circ r \simeq \mathrm{id}_X$ rel A.
(deformaatioretrakti, jos ei vaadita rel A)

Kofibraatioille saadaan seuraava luonnehdinta:

Lause 5.5 *Olkoon X topologinen avaruus ja $A \Subset X$. Seuraavat ehdot ovat yhtäpitäviä:*
1) inkluusio $i\colon A \to X$ on kofibraatio
2) $X \times 0 \cup A \times I$ on $(X \times I)$:n retrakti
3) $X \times 0 \cup A \times I$ on $(X \times I)$:n vahva deformaatioretrakti.

Todistus. 1) $\Rightarrow$ 2): Jos kofibraation määritelmässä valitaan $Y = X \times 0 \cup A \times I$, $f\colon x \mapsto (x, 0)$ ja H on inkluusio, niin saatava $F\colon X \times I \to X \times 0 \cup A \times I$ on retraktio.

2) $\Rightarrow$ 1): Olkoon Y avaruus, $f\colon X \to Y$ ja $H\colon A \times I \to Y$ kuten kofibraation määritelmässä. Ne määrittelevät funktion $g\colon X \times 0 \cup A \times I \to Y$, $g(x, 0) = f(x)$, $g(a, t) = H(a, t)$. Koska A on suljettu, ovat $X \times 0$ ja $A \times I$ suljettuja, joten g on jatkuva. Jos $r\colon X \times I \to X \times 0 \cup A \times I$ on retraktio, niin $F = g \circ r$ on vaadittu homotopia $X \times I \to Y$.

2) $\Rightarrow$ 3): Olkoon $r\colon X \times I \to X \times 0 \cup A \times I$ retraktio. Merkitään projektioita $p_1\colon X \times I \to X$, $p_2\colon X \times I \to I$. Määritellään

$$F\colon X \times I \times I \to X \times I$$

$$F(x, t, s) = (p_1 r(x, (1-s)t), st + (1-s)p_2 r(x, t)).$$

Tällöin F on homotopia $j \circ r \simeq \mathrm{id}_{X \times I}$ rel $X \times 0 \cup A \times I$, missä j on inkluusio $X \times 0 \cup A \times I \to X \times I$.

3) $\Rightarrow$ 2): selvä. $\square$

Esimerkki 5.6 *1) Inkluusio $S^{n-1} \to \bar{B}^n$ on kofibraatio $(n = 1, 2, ...)$: Retraktio $r\colon \bar{B}^n \times I \to \bar{B}^n \times 0 \cup S^{n-1} \times I$ saadaan projisioimalla pisteestä $(0, ..., 0, 2)$:*

$$r(x, t) = \begin{cases} (\frac{x}{|x|}, 2 - \frac{2-t}{|x|}), & \text{jos } |x| \geq 1 - \frac{t}{2} \\ (\frac{2x}{2-t}, 0), & \text{jos } |x| \leq 1 - \frac{t}{2}. \end{cases}$$

2) Inkluusio $\{0\} \to I$ on kofibraatio, HT.
3) Jos X on kampa-avaruus

$$X = I \times 0 \cup 0 \times I \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \times I,$$

ja $x_0 = (0, 1) \in X$, niin $\{x_0\} \hookrightarrow X$ ei ole kofibraatio (todistus myöhemmin).

Lause 5.7 *1)* $\mathrm{id}: X \to X$ *on kofibraatio.*
2) Jos $i: A \to X$ *ja* $j: X \to Z$ *ovat kofibraatioita, niin* $j \circ i: A \to Z$ *on kofibraatio.*
3) Jos $i: A \to X$ *on kofibraatio, ja* B *on topologinen avaruus, niin* $\mathrm{id} \times i: B \times A \to B \times X$ *on kofibraatio (samoin* $i \times \mathrm{id}: A \times B \to X \times B$*).*

Todistus. HT. $\square$

Korollaari 5.8 *Oletetaan, että* $i: A \to X$ *ja* $j: B \to Y$ *ovat kofibraatioita. Tällöin*

$$i \times j: A \times B \to X \times Y$$

on kofibraatio.

Todistus. Seuraa edellisen lauseen kohdista 2) ja 3) sovellettuna yhdistettyyn kuvaukseen

$$i \times j = (i \times \mathrm{id}) \circ (\mathrm{id} \times j): A \times B \to A \times Y \to X \times Y. \square$$

Lause 5.9 *Olkoon* $A \hookrightarrow X$ *kofibraatio ja* Y *kutistuva avaruus. Tällöin jokaisella kuvauksella* $f: A \to Y$ *on jatkuva jatke* $g: X \to Y$*.*

Todistus. Koska Y on kutistuva, on f nollahomotooppinen (seuraa harjoitustehtävästä V:21:6). Vakiokuvauksella $c'_{y_0}: A \to Y$ on tietysti jatke $k: X \to Y$, $k(x) \equiv y_0$. Koska $A \hookrightarrow X$ on kofibraatio, on olemassa homotopia $F: X \times I \to Y$, jolle $F_0 = k$ ja $F|A \times I = H$. Tällöin $g = F_1$ on haluttu jatke. $\square$

Kofibraatioiden lokaali luonnehdinta

Osoitamme, että kofibraatiossa $A \subset X$ aliavaruus A on upotettu "siististi" avaruuteen X, t.s. A:lla on sopivan säännöllisiä ympäristöjä, ja että näiden avulla kofibraatiot voidaan karakterisoida.

Lemma 5.10 *Olkoot* X, C *topologisia avaruuksia,* C *kompakti. Jos*

$$\varphi: X \times C \to \mathbb{R}$$

on jatkuva kuvaus, niin myös kaavan

$$f(x) = \max_{c \in C} \varphi(x, c)$$

määrittelemä funktio $f: X \to \mathbb{R}$ *on jatkuva.*

Todistus. HT. □

Lause 5.11 *(D. Puppe, A. Strøm) Olkoon X topologinen avaruus, $A \Subset X$. Seuraavat ehdot ovat yhtäpitäviä:*
1) Inkluusio $i: A \to X$ on kofibraatio
2) On olemassa kuvaus $u: X \to I$ ja homotopia $h: X \times I \to X$, joille

- *$A = u^{-1}(0)$*
- *$h(x, 0) = x$ jokaisella $x \in X$, $h(a, t) = a$ jokaisella $a \in A, t \in I$*
- *$h(x, t) \in A$, jos $u(x) < t$.*

Todistus. 1) $\Rightarrow$ 2): Jos $i: A \to X$ on kofibraatio, niin Lauseen 5.5 nojalla on olemassa retraktio $r: X \times I \to X \times 0 \cup A \times I$. Merkitään projektioita $p_1: X \times I \to X$ ja $p_2: X \times I \to I$.
Määritellään funktiot $u: X \to I$ ja $h: X \times I \to X$ kaavoilla

$$u(x) = \max_{t \in I}(t - p_2 r(x, t)), \quad h(x, t) = p_1 r(x, t).$$

Funktio h on selvästi jatkuva ja u:n jatkuvuus seuraa edellisestä lemmasta. Toinen ehdoista seuraa siitä, että r on retraktio.
Tarkistetaan kolmas ehto: jos $u(x) < t$, niin $p_2 r(x, t) > 0$, joten $r(x, t) \in A \times I$ ja $h(x, t) = p_1 r(x, t) \in A$.
Lopuksi ensimmäinen ehto: Inkluusio $A \subset u^{-1}(0)$ pätee, sillä jos $a \in A$, niin $r(a, t) = (a, t)$, joten $t - p_2 r(a, t) = 0$ jokaisella $t \in I$ ja siis $u(a) = 0$.
Inkluusio $u^{-1}(0) \subset A$ pätee, sillä jos $u(x) = 0$, niin $h(x, t) \in A$ jokaisella $t > 0$ kolmannen ehdon nojalla. Tällöin $x = h(x, 0) \in \overline{A} = A$, koska A on suljettu.

2) $\Rightarrow$ 1): Jos kuvauksilla u ja h on e.m. ominaisuudet, niin kaava

$$r(x, t) = \begin{cases} (h(x, t), 0), & \text{jos } u(x) \geq t \\ (h(x, t), t - u(x)), & \text{jos } u(x) \leq t \end{cases}$$

määrittelee retraktion $r: X \times I \to X \times 0 \cup A \times I$, joten $i: A \to X$ on kofibraatio Lauseen 5.5 nojalla. □

Korollaari 5.12 *(Kofibraatioiden tulolause) Olkoot $A \hookrightarrow X$ ja $B \hookrightarrow Y$ kofibraatioita. Tällöin*

$$X \times B \cup A \times Y \hookrightarrow X \times Y$$

on kofibraatio.

Todistus. Olkoot $u: X \to I$, $h: X \times I \to X$ edellisen lauseen kuvaukset kofibraatiolle $A \subset X$ ja $v: Y \to I$, $k: Y \times I \to Y$ vastaavat kuvaukset kofibraatiolle $B \subset Y$. Määritellään nyt $w: X \times Y \to I$ ja $l: X \times Y \times I \to X \times Y$ kaavoilla

$$w(x,y) = \min(u(x), v(y)), \quad x \in X, y \in Y$$

ja

$$l(x,y,t) = (h(x, \min(t, v(y))), k(y, \min(t, u(x)))).$$

Voidaan osoittaa, että w ja l toteuttavat edellisen lauseen ehdot, mistä väite seuraa. $\square$

Tulolauseen sovelluksena todistamme

Lause 5.13 *Jos $i: A \to X$ on kofibraatio ja homotopiaekvivalenssi, niin A on X:n vahva deformaatioretrakti.*

Todistus. Olkoon $f: X \to A$ inkluusion $i: A \to X$ homotopiainverssi ja $H: A \times I \to A$ homotopia $f \circ i \simeq \mathrm{id}_A$. Tällöin $H_0 = f|A$. Koska $A \subset X$ on kofibraatio, on olemassa jatke $F: X \times I \to A$, jolle $F_0 = f$ ja $F|A \times I = H$. Tällöin $r = F_1: X \to A$ on retraktio ja $F: f \simeq r$ (siis f ei välttämättä ole retraktio, mutta f on homotooppinen retraktion kanssa). Koska $i \circ f \simeq \mathrm{id}_X$, on myös $i \circ r \simeq \mathrm{id}_X$, olkoon $\tilde{F}: X \times I \to X$ homotopia $\mathrm{id}_X \simeq i \circ r$.
Tähän mennessä olemme siis todistaneet, että A on X:n deformaatioretrakti. Määritellään seuraavaksi homotopia

$$K: (X \times 0 \cup A \times I \cup X \times 1) \times I \to X$$

kaavoilla

$$\begin{cases} K((x,0),s) = x, & \text{jos } x \in X, s \in I \\ K((a,t),s) = \tilde{F}(a,(1-s)t), & \text{jos } a \in A, t, s \in I \\ K((x,1),s) = \tilde{F}(r(x), 1-s), & \text{jos } x \in X, s \in I. \end{cases}$$

Huom. arvolla $s = 1$ keskimmäinen rivi antaa $\tilde{F}(a,0) = a$. Funktio K on hyvin määritelty, koska pisteissä $a \in A$ on

$$K((a,0),s) = a = \tilde{F}(a,0)$$

ja

$$K((a,1),s) = \tilde{F}(a,1-s) = \tilde{F}(r(a),1-s).$$

Lisäksi K on jatkuva ja havaitaan, että K_0 on $\tilde{F}$:n rajoittuma. Kofibraatioiden tulolauseen nojalla

$$X \times \{0,1\} \cup A \times I \subset X \times I$$

on kofibraatio. Siten K voidaan jatkaa homotopiaksi

$$G\colon X \times I \times I \to X$$

siten, että $G_0 = \tilde{F}$. Merkitään $L = G_1\colon X \times I \to X$. Tällöin L on deformaatioretraktio $\mathrm{id}_X \simeq i \circ r$ rel A:

$$L(x,0) = G((x,0),1) = K((x,0),1) = x, \ x \in X$$

$$L(x,1) = G((x,1),1) = K((x,1),1) = \tilde{F}(r(x),0) = r(x), \ x \in X$$
$$L(a,t) = G((a,t),1) = K((a,t),1) = \tilde{F}(a,0) = a, \ a \in A, t \in I.$$

Siis A on X:n vahva deformaatioretrakti. □

Huomautus 5.14 *1) Jos A on X:n vahva deformaatioretrakti, niin inkluusio $A \subset X$ on homotopiaekvivalenssi (tähän ei edes tarvita "vahva"), mutta ei välttämättä kofibraatio (HT).*
2) Voidaan osoittaa, että mikäli X on normaali ja A on nollakohtajoukko (t.s. $A = u^{-1}(0)$ jollakin jatkuvalla kuvauksella $u\colon X \to I$) ja A on X:n vahva deformaatioretrakti, niin $A \subset X$ on kofibraatio.

Korollaari 5.15 *Jos X on kutistuva ja $\{x_0\} \hookrightarrow X$ on kofibraatio, niin (X, x_0) on kantapistekutistuva.*

Todistus. HT. □

Määritelmä 5.16 *Sanomme, että piste $x_0 \in X$ on* hyvä kantapiste*, jos $\{x_0\} \hookrightarrow X$ on kofibraatio.*

Lause 5.17 *Oletetaan, että X on normaali avaruus ja $A \Subset X$. Seuraavat ehdot ovat yhtäpitäviä:*
1) $i\colon A \to X$ on kofibraatio
2) On olemassa A:n ympäristö V X:ssä siten, että inkluusio $j\colon A \to V$ on kofibraatio
3) On olemassa A:n ympäristö V ja kuvaus $\psi\colon X \to I$ siten, että A on V:n vahva deformaatioretrakti, $A = \psi^{-1}(0)$ ja $\psi|X \setminus V \equiv 1$.

Todistus. Kts. Lause 4.1.9 ja Teoreema 4.1.16, [Aguilar, Gitler, Prieto: Algebraic topology from a homotopical viewpoint]. $\square$

Huomautus 5.18 *Metrinen avaruus X on aina normaali. Jos $A \subset V \Subset X$, niin edellisen lauseen 3)-kohdan funktio $\psi\colon X \to I$ voidaan määritellä kaavalla*

$$\psi(x) = \frac{d(x,A)}{d(x,A) + d(x, X \setminus V)}.$$

Siis nämä oletukset (normaalisuus ja funktion ψ olemassaolo) ovat aina voimassa esim. pareille (X, A), missä $X \subset \mathbb{R}^n$ ja $A \Subset X$.

Esimerkki 5.19 *1) Jokainen piste $x_0 \in \mathbb{R}^n$ on $\mathbb{R}^n$:n vahva deformaatioretrakti ($D(x,t) = tx_0 + (1-t)x$) ja siis hyvä kantapiste. Samoin jokaisen affiinin aliavaruuden inkluusio $A \subset \mathbb{R}^n$ on kofibraatio.*

2) Jos $x_0 \in S^n$, niin $V = S^n \setminus \{-x_0\}$ on x_0:n ympäristö ja $(V, x_0) \approx (\mathbb{R}^n, 0)$. Siten x_0 on V:n vahva deformaatioretrakti ja jokainen $x_0 \in S^n$ on hyvä kantapiste. Sama pätee kaikilla monistoilla M (monisto on aina metristyvä, V:19.6).

3) Voidaan osoittaa, että jokaisen reunallisen moniston M reunalla ∂M on muotoa $V \approx \partial M \times [0,1)$ oleva ympäristö, joten $\partial M \subset M$ on kofibraatio (esim. $S^{n-1} \subset \bar{B}^n$).

6 Korkeammat homotopiaryhmät

Määritellään seuraavaksi homotopiaryhmät $\pi_n(X, x_0)$, $n \geq 2$ ja osoitetaan, että ne ovat Abelin ryhmiä.

Huomautus 6.1 *Merkitään jatkossa perusryhmää $\pi_1(X, x_0)$.*

Jos (X, x_0) ja (Y, y_0) ovat kantapisteavaruuksia ja $f\colon (X, x_0) \to (Y, y_0)$, merkitään

$$[f]_0 = [f]_{x_0} = \{g\colon X \to Y \mid g \simeq f \text{ rel } x_0\}$$

ja

$$[X, Y]_0 = \{[f]_0 \mid f\colon (X, x_0) \to (Y, y_0)\},$$

homotopialuokkien joukko.

Huomautus 6.2 *Perusryhmä voidaan määritellä myös joukkona* $[S^1, X]_0$.

Määritellään nyt $\pi_n(X, x_0) = [S^n, X]_0$ (joukkoina). Ryhmästruktuurin määrittelemistä varten tulkitaan funktiot $S^n \to X$ sopivina funktioina $I^n \to X$. Olkoon $\pi \colon \bar{B}^n \to S^n$ standardikuvaus, jolle $\pi(S^{n-1}) = e_{n+1} = (0, ..., 0, 1)$ ja joka indusoi homeomorfismin $\bar{\pi} \colon \bar{B}^n / S^{n-1} \to S^n$. Olkoon (X, x_0) kantapisteavaruus ja $f \colon (S^n, e_{n+1}) \to (X, x_0)$ kantapistekuvaus. Tällöin $g = f \circ \pi \colon \bar{B}^n \to X$ toteuttaa $g(S^{n-1}) = f(e_{n+1}) = x_0$. Merkitään tällaisia kuvauksia $g \colon (\bar{B}^n, S^{n-1}) \to (X, x_0)$ ja niiden homotopialuokkien rel S^{n-1} joukkoa $[\bar{B}^n, S^{n-1}; X, x_0]$.

Lemma 6.3 *Kuvaus* $[f]_0 \mapsto [f \circ \pi]$ *on bijektio*

$$\pi_n(X, x_0) \to [\bar{B}^n, S^{n-1}; X, x_0].$$

Todistus. HT. □

Lemma 6.4 *On olemassa homeomorfismi* $h \colon I^n \to \bar{B}^n$*, jossa reuna* $\partial I^n = \{(t_1, ..., t_n) \mid t_i = 0 \text{ tai } t_i = 1 \text{ jollakin } i\}$ *kuvautuu palloksi* S^{n-1}.

Todistus. Harjoitustehtävät V:3:10 ja V:3:11. □

Korollaari 6.5 *Kuvaus* $[f]_0 \mapsto [f \circ \pi \circ h]$ *on bijektio*

$$\pi_n(X, x_0) \to [I^n, \partial I^n; X, x_0]. \ \square$$

Olkoon $n \geq 1$ ja $f, g \colon (I^n, \partial I^n) \to (X, x_0)$. Määritellään kompositio $fg \colon (I^n, \partial I^n) \to (X, x_0)$ kaavalla

$$fg(t_1, ..., t_n) = \begin{cases} f(2t_1, t_2, ..., t_n), & \text{jos } 0 \leq t_1 \leq 1/2 \\ g(2t_1 - 1, t_2, ..., t_n), & \text{jos } 1/2 \leq t_1 \leq 1. \end{cases}$$

Tällöin fg on jatkuva ja $fg(\partial I^n) = x_0$.

Lause 6.6 *Joukko* $\pi_n(X, x_0)$ *on ryhmä laskutoimituksena* $[f][g] = [fg]$*. Neutraalialkio on vakiokuvauksen* ϵ_{x_0} *luokka ja alkion* $[f]$ *käänteisalkio on* $[f^{\leftarrow}]$*, missä*

$$f^{\leftarrow}(t_1, ..., t_n) = f(1 - t_1, t_2, ..., t_n).$$

Todistus. Vastaava kuin perusryhmän tapauksessa. □

Määritelmä 6.7 *Avaruus X on n-*yhtenäinen *($n = 0, 1, ...$), jos jokaisella kuvauksella $f\colon S^k \to X$, $k \leq n$, on jatkuva jatke $\bar{B}^{k+1} \to X$. (Huom.* 0-*yhtenäisyys = polkuyhtenäisyys)*

Palautetaan mieleen harjoitustehtävä: jatkuvalla kuvauksella $f\colon S^k \to X$ on jatkuva jatke $\bar{B}^{k+1} \to X$ jos ja vain jos f on nollahomotooppinen. Todistetaan seuraavaksi vähän enemmän:

Lause 6.8 *Olkoon $p_0 \in S^n$, $f\colon S^n \to X$ jatkuva kuvaus. Seuraavat ehdot ovat yhtäpitäviä:*
1) f on nollahomotooppinen
2) f:llä on jatkuva jatke $g\colon \bar{B}^{n+1} \to X$
3) f on nollahomotooppinen rel p_0.

Todistus. "1) $\Rightarrow$ 2)" Harj. 1/Teht. 6
"2) $\Rightarrow$ 3)" Jos $g\colon \bar{B}^{n+1} \to X$ on f:n jatke, määritellään $F\colon S^n \times I \to X$ kaavalla

$$F(x, t) = g((1 - t)x + tp_0).$$

Tällöin F on homotopia $f \simeq c_{y_0}$, missä $y_0 = f(p_0)$. Kun $x = p_0$, on $F(p_0, t) = g(p_0) = f(p_0) = y_0$ jokaisella $t \in I$, joten F on homotopia rel p_0.
"3) $\Rightarrow$ 1)": selvä. $\square$

Korollaari 6.9 *Avaruus X on n-yhtenäinen jos ja vain jos X on polkuyhtenäinen ("$k = 0$") ja $\pi_k(X, x_0) = 0$ kaikilla $x_0 \in X$ ja kaikilla k, $1 \leq k \leq n$.*

Esimerkki 6.10 *1) Kutistuva avaruus on n-yhtenäinen jokaisella $n \geq 0$. (HT)*
2) $\pi_n(S^1, 1) = 0$, kun $n \geq 2$. (HT)

Huomautus 6.11

$$\pi_k(S^1, p_0) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{jos } k = 1 \\ 0, & \text{jos } k \geq 2. \end{cases}$$

Voidaan osoittaa, että arvoilla $n \geq 2$ pätee $\pi_k(S^n, p_0) = 0$, kun $k < n$ ja $\pi_n(S^n, p_0) \cong \mathbb{Z}$. Sen sijaan ei päde $\pi_k(S^n, p_0) = 0$ jokaisella $k > n \geq 2$. Pallojen homotopiaryhmiä on tutkittu paljon, mutta edelleenkään esim. S^2:n kaikkia homotopiaryhmiä ei tunneta.

Huomautus 6.12 *Laskutoimitus määriteltiin yllä koordinaatin t_1 avulla. Voidaan osoittaa, että oleellisesti sama lopputulos saataisiin käyttämällä määritelmässä mitä tahansa muuta koordinaateista $t_2, ..., t_n$.*

Lause 6.13 *$\pi_n(X, x_0)$ on Abelin ryhmä, kun $n \geq 2$.*

Todistus. Kuva 5 havainnollistaa homotopiaa $fg \simeq gf$. $\square$

6.1 Kantapisteen vaihto

Tutkitaan seuraavaksi ryhmien $\pi_n(X, x_0)$ riippuvuutta kantapisteestä $x_0 \in X$, kun $n \geq 1$. Kuten perusryhmän tapauksessa, ei ryhmillä $\pi_n(X, x_0)$ ja $\pi_n(X, x_1)$ ole mitään yhteyttä, jos x_0 ja x_1 ovat X:n eri polkukomponenteissa. Jos taas ovat, niin osoittautuu, että vastaavat ryhmät ovat isomorfiset.
Olkoon $\alpha: I \to X$ polku, $\alpha(0) = x_0$, $\alpha(1) = x_1$. Olkoon (S, p_0) kantapisteavaruus ja tarkastellaan kantapiste-homotopialuokkien joukkoja

$$[S, p_0; X, x_0] \text{ ja } [S, p_0; X, x_1].$$

Määritelmä 6.14 *Kuvaus $f_0: S \to X$ on* α-homotooppinen *kuvauksen $f_1: S \to X$ kanssa, merkitään*

$$f_0 \simeq_\alpha f_1,$$

jos on olemassa homotopia $F: f_0 \simeq f_1$, jolle $F(p_0, t) = \alpha(t)$ jokaisella $t \in I$ (erityisesti siis $f_0(p_0) = \alpha(0)$, $f_1(p_0) = \alpha(1)$).

Lause 6.15 *Olkoot S, X avaruuksia, $p_0 \in S$ hyvä kantapiste, $x_0, x_1 \in X$.*
1) Jos $\alpha: I \to X$ on polku pisteestä x_0 pisteeseen x_1 ja $f_1: (S, p_0) \to (X, x_1)$, niin on olemassa $f_0: (S, p_0) \to (X, x_0)$ siten, että $f_0 \simeq_\alpha f_1$.
2) Jos $f_0 \simeq_\alpha f_1$ ja $f_0' \simeq_\alpha f_1$, niin $[f_0] = [f_0'] \in [S, p_0; X, x_0]$.
3) Jos $f_0 \simeq_\alpha f_1$, $f_0 \simeq f_0'$ rel p_0, $f_1 \simeq f_1'$ rel p_0 ja $\alpha \sim \alpha'$, niin $f_0' \simeq_{\alpha'} f_1'$.

Todistus. 1) Polku α määrää rajoittuman $f_1|\{p_0\}$ homotopian $(p_0, t) \mapsto \alpha(1-t)$. Koska $p_0 \in S$ on hyvä kantapiste, on olemassa homotopia

$$F': S \times I \to X$$

siten, että $F'(x, 0) = f_1(x)$ ja $F'(p_0, t) = \alpha(1-t)$. Määritellään $f_0 = F_1'$ Tällöin

$$F = (F')^{\leftarrow}, \quad F(x, t) = F'(x, 1-t)$$

on α-homotopia $f_0 \simeq_\alpha f_1$.
2) Olkoot $F: f_0 \simeq_\alpha f_1$ ja $F': f_0' \simeq_\alpha f_1$. Tällöin $H = F(F')^{\leftarrow}: f_0 \simeq_{\alpha\alpha^{\leftarrow}} f_0'$. Olkoon $A: I \times I \to X$ polkuhomotopia $\alpha\alpha^{\leftarrow} \sim \epsilon_{x_0}$. Homotopian $H: S \times I \to X$ rajoittuma aliavaruudelle $p_0 \times I$ on $(p_0, t) \mapsto \alpha\alpha^{\leftarrow}(t)$. Nyt A voidaan tulkita rajoittuman homotopiaksi $p_0 \times I \times I \to X$. Koska $p_0 \times I \subset S \times I$ on kofibraatio, on A:lla jatke

$$G: S \times I \times I \to X$$

siten, että $G(x, t, 0) = H(x, t)$ ja $G(p_0, t, s) = A(t, s)$.
Olkoot G_1, G_2, G_3 seuraavat homotopiat rel p_0:

$$G_1(x, t) = G(x, 0, t),\ G_2(x, t) = G(x, t, 1),\ G_3(x, t) = G(x, 1, 1 - t).$$

Tällöin yhdistetty homotopia $G_1G_2G_3: f_0 \simeq f_0'$ rel p_0.
3) Koska $\{p_0\} \subset S$ ja $\{0, 1\} \subset I$ ovat kofibraatioita, on tulolauseen nojalla myös $S \times \{0, 1\} \cup p_0 \times I \subset S \times I$ kofibraatio. Määritellään kuvaukset

$$F, F': (S \times \{0, 1\}) \cup (p_0 \times I) \to X$$

kaavoilla

$$F(x, 0) = f_0(x),\ F(x, 1) = f_1(x),\ F(p_0, t) = \alpha(t)$$

ja

$$F'(x, 0) = f_0'(x),\ F'(x, 1) = f_1'(x),\ F'(p_0, t) = \alpha'(t).$$

Oletuksista $f_0 \simeq f_0'$ rel p_0, $f_1 \simeq f_1'$ rel p_0 ja $\alpha \sim \alpha'$ seuraa, että $F \simeq F'$. Koska $f_0 \simeq_\alpha f_1$, on F:llä jatke $S \times I \to X$. Kofibraatio-ominaisuuden ja harjoitustehtävän x.x nojalla myös F':lla on jatke $S \times I \to X$, t.s. α'-homotopia $f_0' \simeq_{\alpha'} f_1'$. $\square$

Määritellään nyt funktio $[S, p_0; X, x_1] \to [S, p_0; X, x_0]$:
Olkoon α polku pisteestä x_0 pisteeseen x_1 ja $f_1: (S, p_0) \to (X, x_1)$. Tällöin edellisen lauseen 1)-kohdan nojalla on olemassa $f_0: (S, p_0) \to (X, x_0)$ siten, että $f_0 \simeq_\alpha f_1$. Lisäksi luokka $[f_0] \in [S, p_0; X, x_0]$ on yksikäsitteinen kohdan 2) nojalla. Edelleen kohdan 3) nojalla $[f_0]$ riippuu vain luokasta $[f_1] \in [S, p_0; X, x_1]$ ja polun α polkuhomotopialuokasta $\bar{\alpha}$. Näin saadaan hyvin määritelty kuvaus

$$h_{\bar{\alpha}}: [S, p_0; X, x_1] \to [S, p_0; X, x_0]$$

$$h_{\bar{\alpha}}[f_1] = [f_0], \quad \text{jossa siis } f_0 \simeq_\alpha f_1.$$

Lause 6.16 *Olkoot S, X avaruuksia, $p_0 \in S$ hyvä kantapiste ja $f\colon S \to X$.*
1) Jos $\alpha, \beta\colon I \to X$ ovat polkuja siten, että $\alpha(1) = \beta(0)$ ja $f(p_0) = \beta(1)$, niin

$$h_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}[f] = h_{\bar{\alpha}}(h_{\bar{\beta}}[f]).$$

2) $h_{\bar{\epsilon}}[f] = [f]$, missä $\epsilon = \epsilon_{f(p_0)}$ on vakiopolku
3) $h_{\bar{\alpha}}\colon [S, p_0; X, x_1] \to [S, p_0; X, x_0]$ on bijektio jokaisella α.

Todistus. 1) Jos $F\colon f_0 \simeq_\alpha f_0'$ ja $G\colon f_0' \simeq_\beta f$, niin $FG\colon f_0 \simeq_{\alpha\beta} f$. Siis $h_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}[f] = [f_0]$ ja $h_{\bar{\alpha}}(h_{\bar{\beta}}[f]) = h_{\bar{\alpha}}[f_0'] = [f_0]$.
2) Vakiohomotopia $F\colon f \simeq f$, $F(x,t) = f(x)$ jokaisella $t \in I$, on $\epsilon_{f(p_0)}$-homotopia.
3) Kohtien 1) ja 2) nojalla $h_{\bar{\alpha}} h_{\bar{\alpha}^{\leftarrow}} = h_{\bar{\alpha}\bar{\alpha}^{\leftarrow}} = h_{\bar{\epsilon}} = \mathrm{id}$ ja vastaavasti $h_{\bar{\alpha}^{\leftarrow}} h_{\bar{\alpha}} = \mathrm{id}$, joten $h_{\bar{\alpha}}$ on bijektio käänteiskuvauksenaan $h_{\bar{\alpha}^{\leftarrow}}$. $\square$

Olkoon nyt $S = S^n$. Jokainen piste $p_0 \in S^n$ on hyvä kantapiste Esimerkin 5.19 nojalla. Avaruuden X polku α pisteestä x_0 pisteeseen x_1 määrittelee siten bijektion

$$h_{\bar{\alpha}}\colon \pi_n(X, x_1) \to \pi_n(X, x_0).$$

Lause 6.17 *Kun $n \geq 1$, on $h_{\bar{\alpha}}$ ryhmäisomorfismi.*

Todistus. HT. $\square$

Huomautus 6.18 *Jos X on polkuyhtenäinen, on edellisen lauseen nojalla ryhmän $\pi_n(X, x_0)$ isomorfialuokka riippumaton pisteestä x_0, ja sitä merkitään usein $\pi_n(X)$:llä. Kuitenkaan ryhmiä $\pi_n(X, x_0)$ ja $\pi_n(X, x_1)$ ei voi samastaa, koska isomorfismi $h_{\bar{\alpha}}$ saattaa riippua polun α valinnasta. Sanonta $\pi_n(X) = 0$ on silti mielekäs.*
Esim. voidaan sanoa: Avaruus X on n-yhtenäinen jos ja vain jos X on polkuyhtenäinen ja $\pi_k(X) = 0$ jokaisella $k = 1, ..., n$.

Esimerkki 6.19 *Tapaus $n = 1$. Olkoon $\beta\colon I \to X$ x_1-kantainen silmukka ja α polku pisteestä x_0 pisteeseen x_1. Tällöin*

$$h_{\bar{\alpha}}(\bar{\beta}) = \bar{\alpha}\bar{\beta}\overline{\alpha^{\leftarrow}} \quad \text{(HT).} \ \square$$

Erityisesti, jos $x_0 = x_1$, on $h_{\bar{\alpha}}\colon \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(X, x_0)$ luokalla $\bar{\alpha}$ konjugointi:

$$\bar{\beta} \mapsto \bar{\alpha}\bar{\beta}\bar{\alpha}^{-1}.$$

Yleisemmin voidaan määritellä perusryhmän $\pi_1(X, x_0)$ toiminta kaikissa homotopiajoukoissa $[S, p_0; X, x_0]$ seuraavasti:
Olkoot (S, p_0), (X, x_0) kantapisteavaruuksia, $p_0 \in S$ hyvä kantapiste. Kuvaus

$$h\colon \pi_1(X, x_0) \times [S, p_0; X, x_0] \to [S, p_0; X, x_0]$$
$$(\bar{\alpha}, [f]) \mapsto h_{\bar{\alpha}}[f]$$

on ryhmän $\pi_1(X, x_0)$ toiminta joukossa $[S, p_0; X, x_0]$:
1) $h(\bar{\epsilon}, [f]) = [f]$ Lauseen 6.16 2)-kohdan nojalla.
2) $h(\bar{\alpha}\bar{\beta}, [f]) = h(\bar{\alpha}, h(\bar{\beta}, [f]))$ Lauseen 6.16 1)-kohdan nojalla.
Jos lisäksi $S = S^n$ $(n \geq 1)$, niin Lauseen 6.17 nojalla
3) $h_{\bar{\alpha}}\colon \pi_n(X, x_0) \to \pi_n(X, x_0)$ on ryhmäisomorfismi jokaisella $\bar{\alpha}$.

Lause 6.20 *Jos X on polkuyhtenäinen avaruus ja $n \geq 1$, niin luonnollinen kuvaus*

$$j\colon \pi_n(X, x_0) \to [S^n, X]$$

on surjektio. Se on bijektio jos ja vain jos $\pi_1(X, x_0)$ toimii triviaalisti ryhmässä $\pi_n(X, x_0)$.

Todistus. Olkoon $f\colon S^n \to X$. Merkitään $x_1 = f(p_0)$. Koska X on polkuyhtenäinen, on olemassa polku α pisteestä x_0 pisteeseen x_1. Olkoon $h_{\bar{\alpha}}[f] = [g]$; tällöin $g(p_0) = x_0$ ja $g \simeq f$, joten $[f] = j[g]$. Siis j on surjektio.
Kantapistekuvauksille $g_1, g_2\colon (S^n, p_0) \to (X, x_0)$ on $j[g_1] = j[g_2]$ jos ja vain jos on olemassa homotopia $F\colon g_1 \simeq g_2$. Olkoon $\alpha\colon I \to X$ polku $\alpha(t) = F(p_0, t)$. Tällöin α on x_0-kantainen silmukka ja $F\colon g_1 \simeq_\alpha g_2$, joten $[g_1] = h_{\bar{\alpha}}[g_2]$. Siis

(1) $\quad j[g_1] = j[g_2]$ jos ja vain jos $[g_1] = h_{\bar{\alpha}}[g_2]$ jollakin $\bar{\alpha} \in \pi_1(X, x_0)$.

"$\Leftarrow$": Jos toiminta on triviaali, yhtälöstä $j[g_1] = j[g_2]$ seuraa kaavan (1) nojalla, että $[g_1] = [g_2]$, joten j on injektio.
"$\Rightarrow$": Jos $[g_1] = h_{\bar{\alpha}}[g_2]$, on siis $j[g_1] = j[g_2]$ ja j:n bijektiivisyyden nojalla $[g_1] = [g_2]$ eli $\bar{\alpha}$ toimii triviaalisti. $\square$

Huomautus 6.21 *Avaruus X on* n-yksinkertainen $(n \geq 1)$, *jos se on polkuyhtenäinen ja $\pi_1(X, x_0)$ toimii triviaalisti $\pi_n(X, x_0)$:ssa jollakin $x_0 \in X$ (ja siis kaikilla kantapisteillä $x \in X$, HT). Tällöin siis jokainen kuvaus $f\colon S^n \to X$ määrää yksikäsitteisen alkion ryhmässä $\pi_n(X, x_0)$ riippumatta siitä, onko $f(p_0) = x_0$. Esimerkiksi yhdesti yhtenäinen avaruus on n-yksinkertainen jokaisella $n \geq 1$; voidaan osoittaa, että polkuyhtenäinen avaruus X on* 1-*yksinkertainen jos ja vain jos $\pi_1(X, x_0)$ on Abelin ryhmä (HT).*

6.2 Indusoidut homomorfismit

Olkoot (X, x_0), (Y, y_0) kantapisteavaruuksia ja $f\colon (X, x_0) \to (Y, y_0)$ kantapistekuvaus. Jos $g\colon (I^n, \partial I^n) \to (X, x_0)$, niin $f \circ g\colon (I^n, \partial I^n) \to (Y, y_0)$ ja jos $g_1 \simeq g_2$ rel ∂I^n, niin $f \circ g_1 \simeq f \circ g_2$ rel ∂I^n. Siis saadaan hyvinmääritelty kuvaus

$$f_*\colon \pi_n(X, x_0) \to \pi_n(Y, y_0)$$

$$[g] \mapsto [f \circ g].$$

Kuten perusryhmän tapauksessa todistetaan

Lause 6.22 *1) f_* on homomorfismi*

2) $(\mathrm{id}_X)_* = \mathrm{id}_{\pi_n(X,x_0)}$

3) Jos $f\colon (X, x_0) \to (Y, y_0)$ ja $g\colon (Y, y_0) \to (Z, z_0)$, niin $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$

4) Jos $f_0, f_1\colon (X, x_0) \to (Y, y_0)$ ja $f_0 \simeq f_1$ rel *x_0, niin $(f_0)_* = (f_1)_*$.* $\square$

Lause 6.23 *Olkoot X, Y avaruuksia ja $f\colon X \to Y$ homotopiaekvivalenssi. Tällöin*

$$f_*\colon \pi_n(X, x_0) \to \pi_n(Y, f(x_0))$$

on isomorfismi jokaisella $n \geq 1$ ja jokaisella kantapisteellä $x_0 \in X$. $\square$

7 Fibraatiot

Olkoot X, E, B avaruuksia, $p\colon E \to B$ jatkuva surjektio ja $f\colon X \to B$ jatkuva. Nosto-ongelma: Onko olemassa f:n nostoa $g\colon X \to E$, eli jatkuvaa kuvausta g siten, että $p \circ g = f$.

$$\begin{tikzcd} & E \arrow[d, "p"] \\ X \arrow[ur, dotted, "g"] \arrow[r, "f"'] & B \end{tikzcd}$$

Esimerkki 7.1 *1) Jos $X = B$, niin identtisen kuvauksen nosto on n.s.* sektio $s\colon B \to E$. *Siis $p \circ s = \mathrm{id}_B$.*
2) Jos p on peitekuvaus, olemme todistaneet Lauseessa 2.9 välttämättömän ja riittävän ehdon noston olemassaololle.

Olkoot E, B avaruuksia, $p\colon E \to B$ jatkuva surjektio.

Määritelmä 7.2 *Kuvauksella* $p: E \to B$ *on* nosto-ominaisuus *avaruuden* X *suhteen, jos jokaisella kuvauksella* $f: X \to B$ *on nosto* $g: X \to E$.

Lause 7.3 *Kuvauksella* $p: E \to B$ *on nosto-ominaisuus kaikkien avaruuksien* X *suhteen jos ja vain jos* p*:llä on sektio* $s: B \to E$.

Todistus. "$\Rightarrow$": Valitaan $X = B$, $f = \mathrm{id}_B$. Sen nosto on sektio $s: B \to E$.
"$\Leftarrow$": Jos $s: B \to E$ on sektio ja $f: X \to B$ jatkuva kuvaus, niin $g = s \circ f: X \to E$ on f:n nosto: jokaisella $x \in X$ on

$$p \circ g(x) = p(s(f(x))) = f(x),$$

koska $p \circ s = \mathrm{id}$. $\square$

Huomautus 7.4 *Sektio on olemassa esim. jos p on karteesisen tulon projektio jollekin tulon tekijälle.*

Määritelmä 7.5 *Kuvauksella* $p: E \to B$ *on* homotopiannosto-ominaisuus *avaruuden* X *suhteen, jos jokaista kuvausta* $f: X \to E$ *ja homotopiaa* $H: X \times I \to B$*, joille* $H_0 = p \circ f$*, kohti on olemassa homotopia* $F: X \times I \to E$*, jolle* $F_0 = f$ *ja* $p \circ F = H$.

Jos f tulkitaan kuvaukseksi $X \times 0 \to E$, niin tilannetta voidaan havainnollistaa kaaviolla

$$\begin{tikzcd} X \times 0 \arrow[r, "f"] \arrow[d] & E \arrow[d, "p"] \\ X \times I \arrow[r, "H"'] \arrow[ur, dotted, "F"] & B \end{tikzcd}$$

Kuvaus $p: E \to B$ on *fibraatio* (tai Hurewiczin säieavaruus, engl. Hurewicz fiber space), jos sillä on homotopiannosto-ominaisuus kaikkien avaruuksien suhteen. Kuvaus $p: E \to B$ on *heikko fibraatio* (tai Serren säieavaruus, engl. Serre fiber space), jos sillä on homotopiannosto-ominaisuus kaikkien kuutioiden I^n, $n \geq 0$, suhteen ($I^0 = \{0\}$).
Avaruus E on *kokonaisavaruus* (total space), B *kanta-avaruus* (base space) ja $F_b = p^{-1}(b)$ *säie* pisteen b päällä (fiber over b).
Jos $p: E \to B$ on heikko fibraatio, niin jokainen polku $\alpha: I \to B$ voidaan nostaa poluksi $\alpha': I \to E$, jonka alkupisteeksi $\alpha'(0) = e_0$ voidaan valita mikä tahansa piste pisteen $\alpha(0) = b_0$ säikeestä F_{b_0}. Nimittäin $I^0 = \{0\}$ on yhden pisteen avaruus, α voidaan tulkita homotopiaksi $H: \{0\} \times I \to B$ ja piste e_0 kuvaukseksi $f: \{0\} \to E$ siten, että $pf(0) = p(e_0) = b_0 = H(0, 0)$. Nosto α' ei yleensä ole yksikäsitteinen.

Esimerkki 7.6 *1) Olkoon $F \neq \emptyset$ avaruus, $pr_1: B\times F \to B$ projektio. Tällöin pr_1 on fibraatio, jonka jokainen säie $F_b = \{b\}\times F \approx F$: Jos $f = (f_1, f_2): X \to B\times F$ on kuvaus ja $H: X\times I \to B$ on homotopia siten, että $H_0 = pr_1 \circ f = f_1$, niin*

$$F: X \times I \to B \times F$$

$$F(x,t) = (H(x,t), f_2(x))$$

on H:n nosto ($pr_1 \circ F = H$), jolle $F_0 = f$.
2) Samoin jokainen kuvaus $p: E \to B$, jolle löytyy homeomorfismi $\varphi: B\times F \to E$ (jollakin avaruudella F), jolle $p \circ \varphi = pr_1$, on fibraatio (HT).

$$\begin{tikzcd} B \times F \arrow[rr, "\varphi", "\approx"'] \arrow[dr, "pr_1"'] & & E \arrow[dl, "p"] \\ & B & \end{tikzcd}$$

Polun $\alpha: I \to B$ nostot $\alpha': I \to B \times F$ siten, että $\alpha'(0) = (b_0, f_0)$, missä $b_0 = \alpha(0)$, ovat täsmälleen polut $\alpha' = (\alpha, \beta)$, missä $\beta: I \to F$ on mielivaltainen polku alkupisteenä f_0. Nosto α' on siis yksikäsitteinen jos ja vain jos pisteen f_0 polkukomponentti on $\{f_0\}$ (vrt. peiteavaruudet).

Lause 7.7 *Peitekuvaus on fibraatio.*

Todistuksen idea. Kts. esim. Spanier: Algebraic Topology, Theorem 3, s. 67.

$$\begin{tikzcd} X \times 0 \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i"] & E \arrow[d, "p"] \\ X \times I \arrow[r, "H"'] \arrow[ur, dotted, "F"] & B \end{tikzcd}$$

Kiinnitetään $x \in X$, jolloin kaava $\alpha(t) = H(x,t)$ määrittelee polun $\alpha: I \to B$. Tällä on nosto $\tilde{\alpha}: I \to E$ siten, että $\tilde{\alpha}(0) = f(x, 0)$. Määritellään $F(x,t) = \tilde{\alpha}(t)$, $t \in I$. Tällä tavoin saadaan funktio $F: X \times I \to E$, jolle $F_0 = f$ ja $p \circ F = H$. Voidaan osoittaa, että F on jatkuva. $\square$

Lause 7.8 *Olkoon $p: E \to B$ fibraatio ja $f: X \to B$ nollahomotooppinen kuvaus. Tällöin f:llä on nosto $g: X \to E$.*

Todistus. Olkoon $H: X \times I \to B$ homotopia $c_{b_0} \simeq f$. Koska p on surjektio, on olemassa $e_0 \in E$ siten, että $p(e_0) = b_0$. Vakiokuvauksen $c_{b_0}: X \to B$ nosto on vakiokuvaus $c_{e_0}: X \to E$. Koska p on fibraatio, H voidaan nostaa homotopiaksi $F: X \times I \to E$ siten, että $F(x, 0) = e_0$ jokaisella $x \in X$ ja $p \circ F = H$. Kuvaus $g = F_1$ on haluttu nosto. $\square$

Lause 7.9 *1) Homeomorfismi $p: E \to B$ on fibraatio.*
2) Jos $p: E \to B$ ja $q: B \to A$ ovat fibraatioita, niin $q \circ p: E \to A$ on fibraatio.
3) Jos $p: E \to B$ on fibraatio ja C on avaruus, niin $p \times \mathrm{id}: E \times C \to B \times C$ on fibraatio.

Todistus. 1) – 2) HT.
3) Olkoon $p: E \to B$ fibraatio, $H = (H', H''): X \times I \to B \times C$ homotopia ja $f = (f', f''): X \to E \times C$ jatkuva kuvaus siten, että $H_0 = (p \times \mathrm{id}) \circ f$ eli $(H'_0, H''_0) = (pf', f'')$.
Tällöin $H': X \times I \to B$ ja $f': X \to E$ määrittelevät homotopiannosto-ongelman fibraatiolle $p: E \to B$. Olkoon $F': X \times I \to E$ sen ratkaisu, $F'_0 = f'$ ja $p \circ F' = H'$.
Tällöin $F = (F', H''): X \times I \to E \times C$ on H:n nosto ja $F_0 = f$:

$$(p \times \mathrm{id}) \circ F = (p \circ F', H'') = (H', H'') = H$$

ja

$$F_0 = (F'_0, H''_0) = (f', f'') = f. \ \square$$

Korollaari 7.10 *Jos $p_1: E_1 \to B_1$ ja $p_2: E_2 \to B_2$ ovat fibraatioita, niin $p_1 \times p_2: E_1 \times E_2 \to B_1 \times B_2$ on fibraatio.* $\square$

Usein kuvaus tai homotopia on jo nostettu aliavaruudella $A \subset X$ ja etsitään nostoa, joka jatkaa osittaisen noston. Kofibraatioehto takaa tämän onnistumisen.

Lause 7.11 *Olkoon $A \subset X$ kofibraatio ja homotopiaekvivalenssi. Jos kuvauksella $p: E \to B$ on homotopiannosto-ominaisuus avaruuden X suhteen, niin jokaisella noston jatko-ongelmalla*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "h"] \arrow[d, "i"'] & E \arrow[d, "p"] \\ X \arrow[r, "f"'] \arrow[ur, dotted, "g"] & B \end{tikzcd}$$

on ratkaisu $g: X \to E$.

Todistus. Kuvaukset f ja h toteuttavat $p \circ h = f|A$; etsitään siis kuvausta $g: X \to E$ siten, että $g|A = h$ ja $p \circ g = f$.
Koska $A \subset X$ on kofibraatio, ja homotopiaekvivalenssi, on A X:n vahva deformaatioretrakti (Lause 5.13). Olkoon $r: X \to A$ retraktio ja $D: X \times I \to X$ homotopia $i \circ r \simeq \mathrm{id}_X$ rel A. Koska $A \subset X$ on kofibraatio, on Lauseen 5.11 nojalla olemassa $u: X \to I$ siten, että $A = u^{-1}(0)$. Määritellään $\varphi: X \times I \to X$ kaavoilla

$$\varphi(x,t) = \begin{cases} D(x, \frac{t}{u(x)}), & \text{jos } t < u(x) \\ D(x,1), & \text{jos } t \geq u(x). \end{cases}$$

Kuvaus φ on selvästi jatkuva, kun $u(x) > 0$, eli joukossa $(X \setminus A) \times I$. Olkoon sitten $(a,t) \in A \times I$, jolloin $u(a) = 0$ ja $\varphi(a,t) = D(a,1) = a$. Olkoon $U \subset X$ pisteen a ympäristö. Tällöin $D(a,t) = a \in U$ jokaisella $t \in I$, joten $\{a\} \times I \subset D^{-1}(U)$. Koska I on kompakti, on Lauseen V:15.24 nojalla olemassa pisteen a ympäristö $V \subset U$ siten, että $V \times I \subset D^{-1}(U)$. Tällöin $\varphi(V \times I) \subset D(V \times I) \subset U$, joten φ on jatkuva pisteessä $(a,t) \in A \times I$.
Kuvaukset $f \circ \varphi: X \times I \to B$ ja $h \circ r: X \to E$ määrittelevät homotopiannosto-ongelman avaruuden X suhteen:

$$\begin{tikzcd} X \times 0 \arrow[r, "h \circ r"] \arrow[d, "i"'] & E \arrow[d, "p"] \\ X \times I \arrow[r, "f \circ \varphi"'] \arrow[ur, dotted, "G"] & B. \end{tikzcd}$$

Huom. neliö kommutoi, koska

$$p \circ (h \circ r) = (p \circ h) \circ r = (f \circ i) \circ r = f \circ (i \circ r) = f \circ D_0 = f \circ \varphi_0 = (f \circ \varphi)_0.$$

Olkoon $G: X \times I \to E$ sen ratkaisu. Kuvaus $g: X \to E$, $g(x) = G(x, u(x))$ on tällöin alkuperäisen nosto-ongelman ratkaisu:

$$g(a) = G(a,0) = (h \circ r)(a) = h(a) \quad \text{jokaisella } a \in A$$

ja

$$p \circ g(x) = pG(x, u(x)) = f \circ \varphi(x, u(x)) = f \circ D_1(x) = f(x) \text{ jokaisella } x \in X. \ \square$$

Korollaari 7.12 *Oletetaan, että $A \subset X$ on kofibraatio ja $p: E \to B$ kuvaus, jolla on homotopiannosto-ominaisuus avaruuden $X \times I$ suhteen. Tällöin* *jokaisella homotopian jatko-ongelmalla*

$$
\begin{tikzcd}
X \times 0 \cup A \times I \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i"] & E \arrow[d, "p"] \\
X \times I \arrow[r, "H"'] \arrow[ur, dotted, "F"] & B
\end{tikzcd}
$$

on ratkaisu $F\colon X \times I \to E$.

Todistus. Koska $A \subset X$ on kofibraatio, on $X \times 0 \cup A \times I \subset X \times I$ vahva deformaatioretrakti (Lause 5.5), erityisesti inkluusio i on homotopiaekvivalenssi. Lisäksi i on kofibraatio tulolauseen 5.12 nojalla (inkluusio $\{0\} \subset I$ on kofibraatio). Väite seuraa nyt Lauseesta 7.11. $\square$

7.1 Säiekimput

Säiekimpun (engl. fiber bundle) käsite on yleistys sekä tuloavaruuden että peiteavaruuden käsitteille.

Määritelmä 7.13 Säiekimppu *on nelikko* (B, p, E, F), *missä*

- B, E *ja* F *ovat avaruuksia ja* $p\colon E \to B$ *on jatkuva surjektio*
- *Avaruudella* B *on avoin peite* $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$ *ja jokaisella* $\alpha \in A$ *on olemassa homeomorfismi*
$$\varphi_\alpha\colon U_\alpha \times F \to p^{-1}(U_\alpha)$$
siten, että $p \circ \varphi_\alpha = pr_1$.

$$
\begin{tikzcd}
U_\alpha \times F \arrow[rr, "\varphi_\alpha", "\approx"'] \arrow[dr, "pr_1"'] & & p^{-1}(U_\alpha) \arrow[dl, "p|"] \\
& U_\alpha &
\end{tikzcd}
$$

Avaruudet B *ja* E *ovat kimpun* kanta- *ja* kokonaisavaruus *ja* $p\colon E \to B$ *on* kimppuprojektio.
Säie $F_b = p^{-1}(b)$ *pisteen* b *päällä on homeomorfinen kimpun* säikeen F *kanssa jokaisella* $b \in B$ *(koska* $\varphi_\alpha|\colon pr_1^{-1}(b) = \{b\} \times F \approx p^{-1}(b)$).

Esimerkki 7.14 *1) Tuloavaruuden projektio:* $(B, pr_1, B \times F, F)$ *on säiekimppu: avoimeksi peitteksi voidaan valita* $\{B\}$ *ja kuvaukseksi* φ *voidaan valita* $\mathrm{id}_{B\times F}$.
Yleisemmin: säiekimppua sanotaan triviaaliksi, *jos voidaan valita* $U_\alpha = B$, *t.s. on olemassa homeomorfismi* $\varphi\colon B\times F \to E$ *siten, että* $p\circ\varphi = pr_1$. *Yleinen säiekimppu on triviaali joukkojen* U_α *päällä eli n.s. lokaalisti triviaali.*
2) Jos $p\colon X \to Y$ *on peitekuvaus,* Y *on yhtenäinen ja lokaalisti polkuyhtenäinen ja* $y_0 \in Y$, *niin* $(Y, p, X, p^{-1}(y_0))$ *on säiekimppu (HT).*
3) Jos M *on differentioituva monisto, voidaan määritellä n.s. tangenttikimppu* $T(M)$ *("*M*:n tangenttivektoreiden joukko") ja projektio* $p\colon T(M) \to M$, *joka vektoriin liittää sen alkupisteen. Tällöin* $(M, p, T(M), \mathbb{R}^n)$ *on säiekimppu, missä* $n = \dim(M)$.
4) Olkoon M *Möbiuksen nauha*

$$M = I^2/R,$$

missä relaatio R *samastaa pisteet* $(0,t) \sim (1, 1-t)$, $t \in I$, *ja olkoon* $p\colon M \to S^1$ *projektion* $pr_1\colon I^2 \to I$ *indusoima kuvaus. Tällöin* p *on triviaali joukon* $S^1 \setminus \{b\}$ *päällä jokaisella* $b \in S^1$, *joten* (S^1, p, M, I) *on säiekimppu. Se ei ole triviaali, koska* M*:n reuna* $\partial M \approx S^1$ *on yhtenäinen, kun taas avaruuden* $S^1 \times I$ *reuna on* $S^1 \times \{0,1\}$, *joka ei ole yhtenäinen.*
Avaruudet M *ja* $S^1 \times I$ *ovat reunallisia 2-monistoja; reunapisteellä tarkoitetaan pistettä, jolla on suljetun puolitason* $\{(x,y) \mid y \geq 0\}$ *kanssa homeomorfinen ympäristö.*

Lause 7.15 *Säiekimpun* (B, p, E, F) *projektio* $p\colon E \to B$ *on heikko fibraatio.*

Todistus.

$$\begin{tikzcd}
I^n \times 0 \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i"] & E \arrow[d, "p"] \\
I^n \times I \arrow[r, "H"'] \arrow[ur, dotted, "G"] & B
\end{tikzcd}$$

Olkoot $f\colon I^n \to E$ ja $H\colon I^n \times I \to B$ kuvauksia siten, että $H_0 = p \circ f$. Valitaan avaruuden B avoin peite $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ ja homeomorfismit $\varphi_\alpha\colon U_\alpha \times F \to p^{-1}(U_\alpha)$ kuten säiekimpun määritelmässä. Tällöin $\{H^{-1}(U_\alpha)\}_{\alpha\in A}$ on kompaktin metrisen avaruuden $I^n \times I$ avoin peite, joten sillä on Lebesguen luku $\lambda > 0$. Jaetaan kuutio I^n koordinaattiakselien suuntaisesti pikkukuutioihin K ja väli I osaväleihin $0 = t_0 < t_1 < ... < t_k = 1$ siten, että kunkin joukon $K \times [t_i, t_{i+1}]$ halkaisija on $< \lambda$.

Oletetaan, että H on nostettu kuvaukseksi G joukolla $I^n \times [0, t_i]$ siten, että $G|I^n \times 0 = f$. Jatkamme noston joukolle $I^n \times [0, t_{i+1}]$ pikkukuutio K kerrallaan induktiolla luvun $\dim K$ suhteen.
Jos $\dim K = 0$ (eli K on piste), valitaan U_α siten, että $H(K \times [t_i, t_{i+1}]) \subset U_\alpha$. Koska $p \circ G(K, t_i) = H(K, t_i) \in U_\alpha$, on siis $G(K, t_i) \in p^{-1}(U_\alpha)$. Määritellään

$$G(K, t) = \varphi_\alpha(H(K, t), pr_2\varphi_\alpha^{-1}(G(K, t_i)))$$

jokaisella $t \in [t_i, t_{i+1}]$. Huom. Y.o. kaavassa $H(K, t) \in U_\alpha$ ja $pr_2\varphi_\alpha^{-1}(G(K, t_i)) \in F$, joten $G(K, t) \in p^{-1}(U_\alpha) \subset E$. Tämä on hyvin määritelty ja jatkuva.
Oletetaan sitten, että G on jo määritelty kuutioilla $L \times [t_i, t_{i+1}]$, kun $\dim L < \dim K$. Valitaan α siten, että $H(K \times [t_i, t_{i+1}]) \subset U_\alpha$. Nyt G on jo määritelty joukolla $(K \times t_i) \cup (\partial K \times [t_i, t_{i+1}])$. Koska $p \circ G = H$, on

$$G((K \times t_i) \cup (\partial K \times [t_i, t_{i+1}]) \subset p^{-1}U_\alpha.$$

Triviaalina kimppuna $p^{-1}U_\alpha \to U_\alpha$ on fibraatio (Esimerkki 7.6) ja $(K, \partial K) \approx (I^m, \partial I^m)$, joten $\partial K \subset K$ on kofibraatio. Korollaarin 7.12 nojalla G voidaan jatkaa nostoksi joukolle $K \times [t_i, t_{i+1}]$. $\square$

Lause 7.16 *Jos kanta-avaruus on parakompakti, niin kimppuprojektio on fibraatio.*

Todistus. Esim. Spanier: Algebraic topology, Korollaari 14, s. 96. $\square$

7.2 Fibraation homotopiajono

Tässä kappaleessa osoitetaan, että heikon fibraation säikeen, kokonaisavaruuden ja kanta-avaruuden homotopiaryhmät yhdistää n.s. pitkä eksakti jono. Sovelluksena osoitetaan, että $\pi_2(S^2) \cong \mathbb{Z}$.
Olkoon $p\colon E \to B$ heikko fibraatio, $b_0 \in B$, $e_0 \in F = p^{-1}(b_0)$ kantapisteet. Määrittelemme n.s. *reunakuvauksen*

$$\partial\colon \pi_n(B, b_0) \to \pi_{n-1}(F, e_0)$$

jokaisella $n \geq 1$.
Arvolla $n = 0$ määritellään $\pi_0(X, x_0) = X$:n polkukomponenttien joukko (eli $\pi_0(X, x_0) = [S^0, X]_0$); joukkoon $\pi_0(X, x_0)$ ei määritellä ryhmästruktuuria.

Alkio $[\alpha] \in \pi_n(B, b_0)$ voidaan esittää kuvauksena $\alpha\colon (I^n, \partial I^n) \to (B, b_0)$. Merkitään $I^0 = \{0\}$, $J^0 = \{1\} \subset I^1$, ja

$$I^n = I^n \times 0 \subset I^{n+1},\ J^n = (I^n \times 1) \cup (\partial I^n \times I) \subset I^{n+1},\ n \geq 1,$$

jolloin $I^n \cup J^n = \partial I^{n+1}$ ja $I^n \cap J^n = \partial I^n$ jokaisella $n \geq 0$.
Koska $\{1\} \subset I$ ja $\partial I^n \subset I^n$ ovat kofibraatioita, on $J^n \subset I^n \times I = I^{n+1}$ kofibraatio (tulolause 5.12). Lisäksi J^n ja I^{n+1} ovat kutistuvia, joten $J^n \subset I^{n+1}$ on homotopiaekvivalenssi.
Lauseen 7.11 nojalla α voidaan nostaa kuvaukseksi

$$\beta\colon (I^n, J^{n-1}) \to (E, e_0):$$

$$\begin{tikzcd} J^{n-1} \arrow[r, "c_{e_0}"] \arrow[d, hook] & E \arrow[d, "p"] \\ I^n \arrow[r, "\alpha"'] \arrow[ur, dotted, "\beta"] & B \end{tikzcd}$$

Huom. $\alpha(J^{n-1}) = \{b_0\}$. Koska $p\beta(I^{n-1}) = \alpha(I^{n-1}) \subset \alpha(\partial I^n) = \{b_0\}$, on $\beta(I^{n-1}) \subset F$, joten β:n rajoittuma määrää kuvauksen

$$\gamma\colon (I^{n-1}, \partial I^{n-1}) \to (F, e_0)$$

$$\gamma = \beta | I^{n-1}.$$

Lause 7.17 *Kuvaus*

$$\partial\colon \pi_n(B, b_0) \to \pi_{n-1}(F, e_0)$$

$$[\alpha] \mapsto [\gamma]$$

on hyvin määritelty, kun $n \geq 1$ ja homomorfismi, kun $n \geq 2$.

Todistus. Olkoot $\alpha, \alpha'\colon (I^n, \partial I^n) \to (B, b_0)$ kuvauksia, $\beta, \beta'\colon (I^n, J^{n-1}) \to (E, e_0)$ niiden nostoja ja $H\colon \alpha \simeq \alpha'$ homotopia rel ∂I^n. Määritellään kuvaus

$$f\colon A = (I^n \times 0) \cup (J^{n-1} \times I) \cup (I^n \times 1) \to E$$

siten, että $f(x, 0) = \beta(x)$, $f(x, 1) = \beta'(x)$, kun $x \in I^n$ ja $f(x, t) = e_0$, kun $(x, t) \in J^{n-1} \times I$. Tällöin $p \circ f = H|A$.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, hook] & E \arrow[d, "p"] \\ I^n \times I \arrow[r, "H"'] \arrow[ur, dotted, "F"] & B \end{tikzcd}$$

Tulolauseen nojalla $A \subset I^n \times I$ on kofibraatio, ja koska A ja $I^n \times I$ ovat kutistuvia, inkluusio on homotopiaekvivalenssi. Lauseen 7.11 nojalla f voidaan jatkaa H:n nostoksi $F\colon I^n \times I \to E$. Sen rajoittuma joukolle $I^{n-1} \times I$ on homotopia $\gamma \simeq \gamma'$ rel ∂I^{n-1}. Kuvaus ∂ on siis hyvin määritelty.
Olkoon nyt $n \geq 2$. Jos β, β' ovat kuvausten α, α' nostot siten, että $\beta(J^{n-1}) = \beta'(J^{n-1}) = e_0$, niin $\beta\beta'$ on kuvauksen $\alpha\alpha'$ nosto, ja

$$(\beta\beta')|I^{n-1} = (\beta|I^{n-1})(\beta'|I^{n-1}).$$

Siis

$$\partial([\alpha][\alpha']) = \partial([\alpha\alpha']) = [(\beta|I^{n-1})(\beta'|I^{n-1})] = \partial[\alpha]\partial[\alpha']. \square$$

Inkluusio $i\colon F \subset E$ ja kuvaus $p\colon E \to B$ indusoivat kuvaukset

$$\pi_n(F, e_0) \xrightarrow{i_*} \pi_n(E, e_0) \xrightarrow{p_*} \pi_n(B, b_0)$$

jokaisella $n \geq 0$. Kun $n \geq 1$, ovat i_* ja p_* ryhmähomomorfismeja. Edellisen lauseen reunakuvauksen ∂ avulla nämä lyhyet jonot voidaan yhdistää *heikon fibraation homotopiajonoksi*

$$\ldots \xrightarrow{\partial} \pi_n(F, e_0) \xrightarrow{i_*} \pi_n(E, e_0) \xrightarrow{p_*} \pi_n(B, b_0) \xrightarrow{\partial} \pi_{n-1}(F, e_0) \xrightarrow{i_*} \ldots$$

$$\ldots \xrightarrow{i_*} \pi_0(E, e_0) \xrightarrow{p_*} \pi_0(B, b_0) \longrightarrow 0.$$

Määritelmä 7.18 *Kolmen ryhmän ja homomorfismin muodostama jono*

$$G' \xrightarrow{f} G \xrightarrow{g} G''$$

on eksakti kohdassa G, *jos* $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Ker}(g)$.
Pitkä jono ryhmiä ja homomorfismeja

$$\ldots \longrightarrow G_{n+1} \xrightarrow{f_{n+1}} G_n \xrightarrow{f_n} G_{n-1} \longrightarrow \ldots$$

on eksakti jono, *jos sen jokainen kolmen peräkkäisen ryhmän muodostama osajono on eksakti keskikohdassaan.*
Lyhyt eksakti jono *on muotoa*

$$0 \longrightarrow G' \xrightarrow{f} G \xrightarrow{g} G'' \longrightarrow 0$$

oleva eksakti jono.

Esimerkki 7.19 *1) Jono*

$$0 \longrightarrow H \xrightarrow{f} G$$

on eksakti jos ja vain jos $\mathrm{Ker}(f) = 0$ *eli* f *on injektio.*
2) Jono

$$H \xrightarrow{f} G \longrightarrow 0$$

on eksakti jos ja vain jos $\mathrm{Im}(f) = G$ *eli* f *on surjektio.*
3) Jono

$$0 \longrightarrow H \xrightarrow{f} G \longrightarrow 0$$

on eksakti jos ja vain jos f *on isomorfismi.*

Lause 7.20 *Heikon fibraation homotopiajono on eksakti.*

Todistus. 1) Eksaktisuus kohdassa $\pi_n(F, e_0)$, $n \geq 0$:

$$\pi_{n+1}(B, b_0) \xrightarrow{\partial} \pi_n(F, e_0) \xrightarrow{i_*} \pi_n(E, e_0)$$

"$\mathrm{Im}(\partial) \subset \mathrm{Ker}(i_*)$": Jos $[\gamma] = \partial[\alpha]$, niin $\gamma = \beta | I^n \times 0$, missä $\beta \colon (I^{n+1}, J^n) \to (E, e_0)$. Tällöin $\beta_t = \beta | I^n \times \{t\}$ antaa homotopian $i \circ \gamma = \beta_0 \sim \beta_1 = c_{e_0}$ rel ∂I^n, joten $i_*[\gamma] = [c_{e_0}]$.
"$\mathrm{Ker}(i_*) \subset \mathrm{Im}(\partial)$": Jos $i_*[\gamma] = [c_{e_0}]$, niin on olemassa homotopia $H \colon I^n \times I \to E$ rel ∂I^n siten, että $H_0 = i \circ \gamma$ ja $H_1 = c_{e_0}$. Tällöin $H(J^n) = e_0$, joten $H \colon (I^{n+1}, J^n) \to (E, e_0)$. Koska $p \circ H(I^n) = p \circ i \circ \gamma(I^n) \subset p(F) = \{b_0\}$, on $\alpha = p \circ H \colon (I^{n+1}, \partial I^{n+1}) \to (B, b_0)$ ja $[\gamma] = \partial[\alpha]$.
2) Eksaktisuus kohdassa $\pi_n(E, e_0)$, $n \geq 0$:

$$\pi_n(F, e_0) \xrightarrow{i_*} \pi_n(E, e_0) \xrightarrow{p_*} \pi_n(B, b_0)$$

"$\mathrm{Im}(i_*) \subset \mathrm{Ker}(p_*)$": Jos $[\gamma] \in \pi_n(F, e_0)$, niin $p_* i_*[\gamma] = [p \circ i \circ \gamma] = [c_{b_0}]$.
"$\mathrm{Ker}(p_*) \subset \mathrm{Im}(i_*)$": Jos $p_*[\beta] = [c_{b_0}]$, missä $\beta \colon (I^n, \partial I^n) \to (E, e_0)$, niin on olemassa homotopia $H \colon I^n \times I \to B$ rel ∂I^n siten, että $H_0 = p \circ \beta$ ja $H_1 = c_{b_0}$. Määritellään $f \colon (I^n \times 0) \cup (\partial I^n \times I) \to E$ siten, että $f | I^n \times 0 = \beta$

ja $f|\partial I^n \times I = e_0$. Lauseen 7.12 nojalla f voidaan jatkaa H:n nostoksi $G: I^n \times I \to E$.

$$\begin{tikzcd}
(I^n \times 0) \cup (\partial I^n \times I) \arrow[r, "f"] \arrow[d, hook] & E \arrow[d, "p"] \\
I^n \times I \arrow[r, "H"'] \arrow[ur, dotted, "G"] & B
\end{tikzcd}$$

Merkitään $\beta' = G_1$. Koska $p \circ \beta' = H_1 = c_{b_0}$, on $\beta'(I^n) \subset F$. Siis $[\beta] = [\beta'] \in \mathrm{Im}(i_*)$.

3) Eksaktisuus kohdassa $\pi_n(B, b_0)$, $n \geq 1$:

$$\pi_n(E, e_0) \xrightarrow{p_*} \pi_n(B, b_0) \xrightarrow{\partial} \pi_{n-1}(F, e_0)$$

"$\mathrm{Im}(p_*) \subset \mathrm{Ker}(\partial)$": Jos $[\alpha] \in \mathrm{Im}(p_*)$, niin $\alpha = p \circ \beta$, missä $\beta: (I^n, \partial I^n) \to (E, e_0)$. Määritelmän mukaan $\partial[\alpha] = [\beta|I^{n-1} \times 0] = [c_{e_0}]$.

"$\mathrm{Ker}(\partial) \subset \mathrm{Im}(p_*)$": Olkoon $\alpha: (I^n, \partial I^n) \to (B, b_0)$ siten, että $\partial[\alpha] = [c_{e_0}]$. Olkoon $\beta: (I^n, J^{n-1}) \to (E, e_0)$ α:n nosto ja

$$\gamma = \beta|I^{n-1}: (I^{n-1}, \partial I^{n-1}) \to (F, e_0),$$

kuten ∂:n konstruktiossa. Valitaan homotopia

$$H: I^{n-1} \times I \to F,\ H: c_{e_0} \sim \gamma \text{ rel } \partial I^{n-1}.$$

Nyt H voidaan tulkita kuvaukseksi $H: I^n \to F$, jolle

$$H(I^{n-1} \times 0 \cup \partial I^{n-1} \times I) = \{e_0\}.$$

Viimeisen koordinaatin avulla lasketun komposition $*$

$$\beta' = H * \beta: (I^n, \partial I^n) \to (E, e_0)$$

projektio $p \circ \beta' = c_{b_0} * \alpha$. Nyt

$$[\alpha] = [c_{b_0} * \alpha] = [p \circ \beta'] = p_*[\beta'] \in \mathrm{Im}(p_*). \ \square$$

Korollaari 7.21 *Olkoon p heikko fibraatio, $b_0 \in B$, $e_0 \in F = p^{-1}(b_0)$. Jos säie F on diskreetti (esim. jos p on peitekuvaus), niin*

$$p_*: \pi_n(E, e_0) \to \pi_n(B, b_0)$$

on isomorfismi, kun $n \geq 2$ ja injektio, kun $n = 1$.

Todistus. Koska F on diskreetti, on $\pi_n(F, e_0) = 0$, kun $n \geq 1$. Kun $n \geq 2$, saadaan p:n eksaktista homotopiajonosta

$$0 \longrightarrow \pi_n(E, e_0) \xrightarrow{p_*} \pi_n(B, b_0) \longrightarrow 0,$$

joten Esimerkin 7.19 kohdan 3) nojalla p_* on isomorfismi.
Jonon loppupää on

$$0 \longrightarrow \pi_1(E, e_0) \xrightarrow{p_*} \pi_1(B, b_0) \xrightarrow{\partial} \quad ...$$

joten Esimerkin 7.19 1)-kohdan nojalla p_* on injektio, kun $n = 1$. $\square$

Huomautus 7.22 *Jos lisäksi E on polkuyhtenäinen, voidaan osoittaa, että ∂ indusoi bijektion*

$$\pi_1(B, b_0)/p_*\pi_1(E, e_0) \to F.$$

(Vrt. peiteavaruuksille vastaava tulos: Massey, s. 162)

7.3 Esimerkkejä

Freudenthalin teoreemasta (kts. harjoitukset) seuraa, että $\pi_k(S^n) = 0$, kun $0 \leq k < n$, mutta tämä voidaan todistaa myös suoraan.

Lause 7.23

$$\pi_k(S^n) = 0, \text{ kun } 0 \leq k < n.$$

Todistus. Pallot ovat polkuyhtenäisiä (Topologia I, 14.28.5), joten

$$\pi_0(S^n) = 0, \text{ kun } n > 0.$$

Pallot ovat yhdesti yhtenäisiä, kun $n > 1$ Lauseen 1.6 nojalla, eli

$$\pi_1(S^n) = 0, \text{ kun } n > 1.$$

Osoitetaan väite induktiolla k:n suhteen (ja samanaikaisesti jokaiselle $n > k$).
Olkoon $2 \leq k < n$ ja oletetaan, että väite $\pi_q(S^m) = 0$, kun $q < m$, on jo todistettu arvoilla $q < k$.
Peitetään S^n avoimilla joukoilla kuten aiemmin:

$$S^n = U_1 \cup U_2, \; U_1 = S^n \setminus \{e_{n+1}\}, \; U_2 = S^n \setminus \{-e_{n+1}\},$$

jolloin

$$U_1 \approx U_2 \approx \mathbb{R}^n \text{ ja } U_1 \cap U_2 \approx S^{n-1} \times]-1,1[\simeq S^{n-1}.$$

Esitetään mielivaltainen alkio $[f] \in \pi_k(S^n)$ kuvauksena $f\colon (I^k, \partial I^k) \to (S^n, p_0)$. Koska (U_1, p_0) on kutistuva, riittää osoittaa, että

$$f \simeq g \text{ rel } \partial I^k, \text{ jossa } g(I^k) \subset U_1.$$

Jaetaan I^k pikkukuutioihin

$$K = K(a,r,L) = \{x \in \mathbb{R}^k \mid a_i \leq x_i \leq a_i + r, \text{ kun } i \in L, \ x_i = a_i, \text{ kun } i \notin L\},$$

missä $r > 0$, $a = (a_1, ..., a_k) \in I^k$, $a + r = (a_1 + r, ..., a_k + r) \in I^k$ ja $L \subset \{1, 2, ..., k\}$ (voi olla $L = \emptyset$).
Kuution K sivut ovat $K' \subset K$, jotka saadaan asettamalla lisäehtoja $x_i = a_i$ tai $x_i = a_i + r$ joillakin $i \in L$ ja reuna $\partial K \subset K$ on K:n aitojen sivujen yhdiste.
Valitaan kuution I^k peitteelle $\{f^{-1}(U_1), f^{-1}(U_2)\}$ Lebesguen luku $\lambda > 0$. Valitaan n siten, että $\operatorname{diam}(K(a, 1/n)) = \sqrt{k}/n < \lambda$ ja jaetaan I^k:n kukin koordinaatti tasavälisesti n osaan.
Tällöin I^k tulee jaettua pikkukuutioihin, joiden kuvat $f(K) \subset U_1$ tai $f(K) \subset U_2$. Merkitään

$$A = \bigcup_{f(K) \subset U_1} K, \ K^q = \bigcup_{\dim(K) \leq q} K, \ K_q = A \cup K^q,$$

jolloin $f(\partial I^k) = p_0 \in U_1$, joten $\partial I^k \subset A$, $A = K_{-1} \subset K_0 \subset \cdots \subset K_k = I^k$.
Konstruoidaan induktiivisesti kuvaukset $g_q\colon K_q \to S^n$, $-1 \leq q \leq k$ siten, että

(1) $$g_q | A = f | A, \quad g_q | K_{q-1} = g_{q-1}$$

(2) $$\text{Jos } x \in K_q, \ f(x) \in U_2, \text{ niin } g_q(x) \in U_1 \cap U_2.$$

Valitaan $q_{-1} = f|A$. Olkoon g_q jo konstruoitu ja $K \subset K_{q+1}$, $K \not\subset K_q$. Siis $\dim(K) = q + 1 \leq k$ ja $K \not\subset A$. Tällöin $f(K) \subset U_2$, joten ehdon (2) nojalla $g_q(\partial K) \subset U_1 \cap U_2 \simeq S^{n-1}$.
Nyt $q < k \leq n-1$, joten $U_1 \cap U_2$ on induktio-oletuksen mukaan q-yhtenäinen. Koska $(K, \partial K) \approx (\bar{B}^{q+1}, S^q)$, on g_q:lla jatke $K \to U_1 \cap U_2$, joka asetetaan g_{q+1}:n arvoksi kuutiolla K.

Olkoon $g = g_k\colon I^k \to S^n$. Tällöin $g(I^k) \subset U_1$. Lause on siis todistettu, kun osoitamme, että $f \simeq g$ rel ∂I^k.
Kiinnitetään homeomorfismi $U_2 \approx \mathbb{R}^n$ ja siirretään sen välityksellä U_2:lle lineaarinen struktuuri. Määritellään $H\colon I^k \times I \to S^n$ kaavalla

$$H(x,t) = \begin{cases} -e_{n+1}, & \text{jos } f(x) = -e_{n+1} \\ (1-t)f(x) + tg(x), & \text{jos } f(x) \in U_2. \end{cases}$$

Kuvauksen H jatkuvuus riittää tarkistaa kullakin pikkukuutiolla $K \subset I^k$. Jos $f(K) \subset U_1$, on $K \subset A$, $f|K = g|K$ ja H on vakiohomotopia. Muutoin $f(K) \subset U_2$, $g(K) \subset U_2$ ja vain jälkimmäinen kaava tulee kyseeseen, joten H on jatkuva K:ssa. Koska H on homotopia rel A ja $\partial I^k \subset A$, on $f \simeq g$ rel ∂I^k.
□

7.4 Hopfin kuvaus $S^3 \to S^2$

Käytetään seuraavassa kompleksilukumerkintöjä

$$S^3 = \{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2 = 1\} = \{(z,z') \in \mathbb{C}^2 \mid z\bar{z}+z'\bar{z}' = 1\}.$$

Myös samastetaan S^2 ja Riemannin pallo $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ stereografisen projektion $e\colon S^2 \to \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ välityksellä:

$$e(\zeta) = \begin{cases} \frac{1}{1-z}(x+iy), & \text{jos } \zeta = (x,y,z) \in S^2 \subset \mathbb{R}^3,\ z < 1 \\ \infty, & \text{jos } \zeta = (0,0,1). \end{cases}$$

Määritellään kuvaus

$$p\colon S^3 \to S^2 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$$

kaavalla

$$p(z,z') = \begin{cases} z/z', & \text{jos } z' \neq 0 \\ \infty, & \text{jos } z' = 0. \end{cases}$$

Jatkuvuus: HT.
Osoitetaan, että (S^2, p, S^3, S^1) on säiekimppu ($S^1 = \{\zeta \in \mathbb{C} \mid \zeta\bar{\zeta} = 1\}$).
Olkoon $U = S^2 \setminus \{\infty\}$ $(= \mathbb{C})$ ja $V = S^2 \setminus \{(0,0,-1)\}$ $(= (\mathbb{C} \setminus \{0\}) \cup \{\infty\})$.
Määritellään homeomorfismi

$$\varphi_U\colon U \times S^1 \to p^{-1}U$$

kaavalla

$$\varphi_U(z,\zeta) = \left(\frac{\zeta z}{\sqrt{z\bar{z}+1}}, \frac{\zeta}{\sqrt{z\bar{z}+1}} \right).$$

Sillä on käänteiskuvaus

$$\psi_U\colon p^{-1}U \to U \times S^1,$$
$$\psi_U(z,z') = \left(\frac{z}{z'}, \frac{z'}{|z'|}\right).$$

Hyvin määritelty, jatkuvuus jne. HT
Lisäksi $p \circ \varphi_U(z,\zeta) = z = pr_1(z,\zeta)$, joten $p \circ \varphi_U = pr_1$.
Määritellään sitten homeomorfismi

$$\varphi_V\colon V \times S^1 \to p^{-1}V$$

kaavalla

$$\varphi_V(z,\zeta) = \begin{cases} \left(\frac{|z|\zeta}{\sqrt{z\bar{z}+1}}, \frac{|z|\zeta}{z\sqrt{z\bar{z}+1}}\right), & \text{jos } z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \\ (\zeta, 0), & \text{jos } z = \infty. \end{cases}$$

Sillä on käänteiskuvaus

$$\psi_V\colon p^{-1}V \to V \times S^1,$$
$$\psi_V(z,z') = \begin{cases} \left(\frac{z}{z'}, \frac{z}{|z|}\right), & \text{jos } z' \neq 0 \\ (\infty, z), & \text{jos } z' = 0. \end{cases}$$

Hyvin määritelty, jatkuvuus jne. HT
Lisäksi

$$p \circ \varphi_V(z,\zeta) = \left\{ \begin{array}{ll} z, & \text{jos } z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \\ p(\zeta,0) = \infty, & \text{jos } z = \infty \end{array} \right\} = z = pr_1(z,\zeta),$$

joten $p \circ \varphi_V = pr_1$.
Siis (S^2, p, S^3, S^1) on säiekimppu, erityisesti se on heikko fibraatio Lauseen 7.15 nojalla. Fibraation homotopiajonosta saadaan

$$\ldots \to \pi_2(S^1) \to \pi_2(S^3) \to \pi_2(S^2) \to \pi_1(S^1) \to \pi_1(S^3) \to \ldots$$

(koska $\pi_2(S^3) = \pi_1(S^3) = 0$), että

$$\pi_2(S^2) \cong \pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}.$$

Huomautus 7.24 *Tiedolla $\pi_2(S^2) \cong \mathbb{Z}$ on samanlaisia seurauksia kuin tiedolla $\pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$ aiemmin:*

- *S^2 ei ole $\bar{B}^3$:n retrakti*
- *jokaisella jatkuvalla $f\colon \bar{B}^3 \to \bar{B}^3$ on kiintopiste*
- *S^2 ja S^n eivät ole homotopiaekvivalentit, kun $n \geq 3$*
- *$\mathbb{R}^3$ ja $\mathbb{R}^n$ eivät ole homeomorfiset, kun $n \geq 4$.*

Freudenthalin teoreemasta saadaan:

$$\pi_n(S^n) \cong \mathbb{Z}$$

jokaisella $n \geq 1$ ja e.m. tuloksista saadaan vielä yleisemmät versiot:

- *S^{n-1} ei ole $\bar{B}^n$:n retrakti, $n \geq 1$*
- *jokaisella jatkuvalla $f\colon \bar{B}^n \to \bar{B}^n$ on kiintopiste*
- *S^n ja S^m eivät ole homotopiaekvivalentit, kun $n \neq m$*
- *$\mathbb{R}^n$ ja $\mathbb{R}^m$ eivät ole homeomorfiset, kun $n \neq m$*
- *Borsukin-Ulamin lause: jos $g\colon S^n \to \mathbb{R}^n$ on jatkuva, niin on olemassa $x \in S^n$ siten, että $g(x) = g(-x)$.*

Hopfin kuvauksen avulla nähdään myös, että $\pi_3(S^2) \neq 0$, osoittamalla että p ei ole nollahomotooppinen. Antiteesi: On olemassa homotopia $H\colon S^3 \times I \to S^2$, $p \simeq c_{x_0}$ $(x_0 \in S^2)$.
Koska p on säiekimpun projektio, se on fibraatio (Lause 7.16), joten H:lla on nosto $\tilde{H}\colon S^3 \times I \to S^3$:

$$\begin{tikzcd}
S^3 \times 0 \arrow[r, "\mathrm{id}"] \arrow[d, hook] & S^3 \arrow[d, "p"] \\
S^3 \times I \arrow[r, "H"'] \arrow[ur, dotted, "\tilde{H}"] & S^2
\end{tikzcd}$$

Siis $\tilde{H}_0 = \mathrm{id}$ ja $p \circ \tilde{H} = H$. Nyt $p \circ \tilde{H}_1(x) = H_1(x) \equiv x_0$, joten $\tilde{H}_1(S^3) \subset p^{-1}(x_0) \approx S^1$. Koska $\pi_3(S^1) = 0$ (Esimerkki 6.10), on $\tilde{H}_1$ nollahomotooppinen. Siis myös $\tilde{H}_0 = \mathrm{id}$ on nollahomotooppinen, joten S^3 on kutistuva. Tästä seuraa, että $\pi_k(S^3) = 0$ jokaisella $k \geq 0$, mikä on ristiriita, koska $\pi_3(S^3) \neq 0$ (harj.tehtävä x.x).

Siis p ei ole nollahomotooppinen ja $\pi_3(S^2) \neq 0$. Itse asiassa homotopiajonossa

$$... \to \pi_3(S^1) \to \pi_3(S^3) \to \pi_3(S^2) \to \pi_2(S^1) \to ...$$

on $\pi_3(S^1) = 0$ ja $\pi_2(S^1) = 0$, joten

$$\pi_3(S^2) \cong \pi_3(S^3) \cong \mathbb{Z}.$$

Jonosta nähdään myös: $\pi_k(S^3) \cong \pi_k(S^2)$ jokaisella $k \geq 3$.

Huomautus 7.25 *Hopfin kuvaus* $p\colon S^3 \to S^2$ *on erikoistapaus yleisemmästä esimerkistä: Jos* $z \in S^{2n+1} \subset \mathbb{C}^{n+1}$ *ja* $\zeta \in S^1 \subset \mathbb{C}$, *niin* $\zeta z \in S^{2n+1}$. *Määritellään* $z \sim z'$ $(\in S^{2n+1})$ *jos ja vain jos* $z' = \zeta z$ *jollakin* $\zeta \in S^1$ *ja määritellään*

$$\mathbb{C}P^n = S^{2n+1}/\sim .$$

Merkitään vastaavaa tekijäkuvausta $p_n\colon S^{2n+1} \to \mathbb{C}P^n$. *Voidaan osoittaa, että*

$$(\mathbb{C}P^n, p, S^{2n+1}, S^1)$$

on säiekimppu. Lisäksi voidaan osoittaa, että $\mathbb{C}P^1 \approx S^2$ *siten, että* $p_n = p\colon S^3 \to S^2$.

References

[1] Aguilar, M., Gitler, S. ja Prieto C.: *Algebraic Topology from a Homotopical Viewpoint*, Springer, 2002.

[2] Dieudonné, J.: *A History of Algebraic and Differential Topology 1900–1960*, Birkhäuser, 1989.

[3] Hatcher, A.: *Algebraic Topology*, Cambridge University Press, 2001.

[4] Massey, W. S.: *Algebraic Topology: An Introduction*, Harcourt, Brace and World, 1967.

[5] Spanier, E. H.: *Algebraic Topology*, Springer, 1966.

[6] Väisälä, J.: *Topologia I*, Limes ry, 2004.

[7] Väisälä, J.: *Topologia II*, Limes ry, 2005.