Homotopy theory
Exercise 9 (12.11.2015)

1. Let X and Y be topological spaces, $f: X \to Y$ a homotopy equivalence, $x_0 \in X$ and $y_0 = f(x_0) \in Y$. Suppose also, that x_0 is a good base point of X and y_0 is a good base point of Y. Prove that the function f has a homotopy inverse g, for which $g(y_0) = x_0$.

2. Suppose that the inclusion $A \subset X$ is a cofibration and Y is a contractible space. Prove: if $f_1, f_2: X \to Y$ are maps such that $f_1|A = f_2|A$, then $f_1 \simeq f_2$ rel A. [Hint: Proposition 5.9 and Corollary 5.12]

3. Let M be an uncountable set, $X = I^M$ the product space and $A = \{0\}^M \subset X$. Prove that A is a strong deformation retract of X. Prove that there doesn't exist any continuous function $\psi: X \to I$ such that $A = \psi^{-1}(0)$. (Using Proposition 5.17 this implies that the inclusion $A \subset X$ is not a cofibration.)

4. a) Prove Corollary 5.15.
b) Let X be the comb space, and $x_0 = (0, 1)$. Prove that x_0 is not a good base point for the space X.

5. a) Suppose that X is a compact Hausdorff space, $A \Subset X$ ($A \neq \emptyset$) and the inclusion $A \subset X$ is a cofibration. Denote by X/A the quotient space obtained by contracting A to one point. Prove that $\{A\} \subset X/A$ is a good base point. (The compactness assumption is not necessary, but this result is sufficient for us.)
b) Prove (using the first part of this exercise) that every point $p_0 \in S^n$ is a good base point. (You may assume that S^n is a homogeneous space, see for example Exercise 14:4 in Väisälä: Topology II)

6. Prove Lemma 6.3 and Corollary 6.5.

Homotopiateoria
Harjoitus 9 (12.11.2015)

1. Olkoot X ja Y topologisia avaruuksia, $f\colon X \to Y$ homotopiaekvivalenssi, $x_0 \in X$ ja $y_0 = f(x_0) \in Y$. Oletetaan lisäksi, että x_0 on avaruuden X hyvä kantapiste ja y_0 on avaruuden Y hyvä kantapiste. Osoita, että funktiolla f on olemassa homotopiakäänteiskuvaus g, jolle $g(y_0) = x_0$.

2. Oletetaan, että inkluusio $A \subset X$ on kofibraatio ja Y on kutistuva avaruus. Osoita: jos $f_1, f_2\colon X \to Y$ ovat kuvauksia, joille $f_1|A = f_2|A$, niin $f_1 \simeq f_2$ rel A. (Vihje: Lause 5.9 ja Korollaari 5.12)

3. Olkoon M ylinumeroituva joukko, $X = I^M$ tuloavaruus ja $A = \{0\}^M \subset X$. Osoita, että A on X:n vahva deformaatioretrakti. Osoita, että A ei ole minkään jatkuvan funktion $\psi\colon X \to I$ nollakohtajoukko. (Tästä seuraa Lauseen 5.17 nojalla, että inkluusio $A \subset X$ ei ole kofibraatio.)

4. a) Todista Korollaari 5.15.

b) Olkoon X kampa-avaruus (Väisälä, harj.tehtävä 21:8), ja $x_0 = (0, 1)$. Osoita, että x_0 ei ole hyvä kantapiste avaruudelle X.

5. a) Oletetaan, että X on kompakti Hausdorff-avaruus, $A \Subset X$ ($A \neq \emptyset$) ja inkluusio $A \subset X$ on kofibraatio. Merkitään X/A on tekijäavaruus, joka saadaan luhistamalla A pisteeksi. Osoita, että $\{A\} \subset X/A$ on hyvä kantapiste. (Kompaktisuusoletus ei ole välttämätön, mutta tämä tulos riittää meille.)

b) Osoita (tämän tehtävän ensimmäisen kohdan avulla), että jokainen piste $p_0 \in S^n$ on hyvä kantapiste. (Voidaan pitää tunnettuna, että S^n on homogeeninen avaruus, kts. Väisälä: harj.tehtävä 14:4.)

6. Todista Lemma 6.3 ja Korollaari 6.5.