Homotopiateoria
Harjoitus 9. Ratkaisuja.

1. Olkoon g kuvauksen f homotopiakäänteiskuvaus ja merkitään $x_1 = g(y_0)$. Merkitään lisäksi $H: X \times I \to X$ homotopiaa $g \circ f \simeq \mathrm{id}_X$. Nyt $\alpha: I \to X$, $\alpha(t) = H(x_0, t)$ on polku X:ssä pisteestä x_1 pisteeseen x_0: $H(x_0, 0) = g(f(x_0)) = x_1$, $H(x_0, 1) = x_0$. Tarkastellaan kaaviota

$$\begin{tikzcd}
\{y_0\} \times 0 \arrow[r] \arrow[d] & \{y_0\} \times I \arrow[d] \arrow[ddr, "\hat{\alpha}"] & \\
Y \times 0 \arrow[r] \arrow[drr, "\hat{g}"'] & Y \times I & \\
 & & X
\end{tikzcd}$$

jossa $\hat{\alpha}(y_0, t) = \alpha(t)$ ja $\hat{g}(y, 0) = g(y)$. Kaavio kommutoi, koska $g(y_0) = \alpha(0)$. Koska inkluusio $\{y_0\} \subset Y$ on kofibraatio, on olemassa $F: Y \times I \to X$ siten, että koko kaavio kommutoi, merkitään $\bar{g} = F_1$. Nyt $\bar{g}$ on kuvauksen f homotopiakäänteiskuvaus, koska $g \simeq \bar{g}$, jolloin $\bar{g} \circ f \simeq g \circ f \simeq \mathrm{id}_X$ ja $f \circ \bar{g} \simeq f \circ g \simeq \mathrm{id}_Y$. Lisäksi $\bar{g}(y_0) = F(y_0, 1) = \alpha(1) = x_0$.

2. Määritellään funktio $F: X \times \{0,1\} \cup A \times I \to Y$ kaavoilla

$$F(x, 0) = f_1(x), \; x \in X,$$

$$F(x, 1) = f_2(x), \; x \in X \;\text{ ja}$$

$$F(a, t) = f_1(a) = f_2(a), \; a \in A, \; t \in I.$$

On helppo tarkistaa, että F on hyvin määritelty ja jatkuva. Kofibraatioiden tulolauseen (Korollaari 5.12) nojalla inkluusio

$$X \times \{0,1\} \cup A \times I \subset X \times I$$

on kofibraatio, joten Lauseen 5.9 nojalla F:llä on jatke $H: X \times I \to Y$. Selvästi H on homotopia $f_1 \simeq f_2$ rel A.

3. Merkitään avaruuden X alkioita $(x_m)_{m \in M}$, $x_m \in I$ jokaisella $m \in M$. Osoitetaan ensin, että A on X:n vahva deformaatioretrakti: Määritellään

$$H: X \times I \to X$$

$$((x_m)_{m\in M}, t) \mapsto ((1-t)x_m)_{m\in M}.$$

Kuvauksen H komponenttikuvaukset ovat muotoa

$$X \times I \xrightarrow{pr\times\iota} I \times I \xrightarrow{\mu} I$$

$$((x_m), t) \mapsto (x_m, 1-t) \mapsto (1-t)x_m,$$

joten H on jatkuva (Lause V:7.10). Selvästi H on vahva deformaatioretraktio.

Osoitetaan sitten, että A ei ole nollakohtajoukko. Antiteesi: $\psi\colon X \to I$ on jatkuva kuvaus ja $A = \psi^{-1}(0)$. Tällöin olisi

$$A = \psi^{-1}(0) = u^{-1}\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} [0, \frac{1}{n}[\right) = \bigcap_{n=1}^{\infty} u^{-1}[0, \frac{1}{n}[.$$

Nyt $u^{-1}[0, \frac{1}{n}[$ on A:n ympäristö X:ssä, joten on olemassa äärellinen joukko $E_n \subset M$ siten, että

$$A \subset \prod_{m\in M} U_m \subset u^{-1}[0, \frac{1}{n}[,$$

missä $U_m = I$ jokaisella $m \in M \setminus E_n$. Koska M on ylinumeroituva, ei voi olla $\cup_{n=1}^{\infty} E_n = M$, joten on olemassa $m_0 \in M$ siten, että

$$\prod_{m\in M} V_m \subset u^{-1}[0, \frac{1}{n}[$$

jokaisella $n \in \mathbb{N}$, missä

$$V_m = \begin{cases} \{0\}, & \text{jos } m \neq m_0 \\ I, & \text{jos } m = m_0. \end{cases}$$

Tämä on ristiriita, koska $\cap_{n=1}^{\infty} u^{-1}[0, \frac{1}{n}[= \{0\}^M$.

4. a) Olkoon $i\colon \{x_0\} \to X$ inkluusio ja $r\colon X \to \{x_0\}$ vakiokuvaus. Tällöin $r \circ i = \mathrm{id}_{\{x_0\}}$ ja $i \circ r = c_{x_0} \simeq \mathrm{id}_X$, koska X on kutistuva. Siis i on homotopiaekvivalenssi. Lauseen 5.13 nojalla $\{x_0\}$ on X:n vahva deformaatioretrakti, mistä seuraa, että $c_{x_0} = i \circ r \simeq \mathrm{id}_X$ rel x_0. Siis (X, x_0) on kantapistekutistuva.

b) Jos $\{(0,1)\} \subset X$ olisi kofibraatio, olisi edellisen nojalla $(X, (0,1))$ kantapistekutistuva, mikä on ristiriita harjoitustehtävän 2:6 kanssa.

5. a) Koska $A \subset X$ on kofibraatio, on olemassa retraktio $r\colon X \times I \to X \times 0 \cup A \times I$. Tarkastellaan kaaviota

$$\begin{tikzcd}
X \times I \arrow[r, "r"] \arrow[d, "\pi\times\mathrm{id}"'] & X \times 0 \cup A \times I \arrow[d, "(\pi\times\mathrm{id})|"] \\
X/A \times I \arrow[r, "\hat{r}"'] & (X/A) \times 0 \cup \{A\} \times I
\end{tikzcd}$$

Määritellään $\hat{r}$ siten, että kaavio kommutoi, t.s.: jos $(\bar{x}, t) \in X/A \times I$, niin valitaan $x \in \pi^{-1}(\bar{x})$, ja määritellään $\hat{r}(\bar{x}, t) = (\pi \times \mathrm{id})(r(x, t))$.
Funktio on hyvin määritelty: Olkoon $(\bar{x}, t) = (\bar{x}', t') \in X/A \times I$. Jos $x \in X \setminus A$ tai $x' \in X \setminus A$, niin välttämättä $x' = x$ ja $t' = t$, jolloin asia on selvä. Jos taas $x, x' \in A$, niin $t = t'$ ja

$$\hat{r}(\bar{x}', t') = (\pi \times \mathrm{id})(r(x', t')) = (\pi \times \mathrm{id})(x', t') = (\bar{x}', t') = (\bar{x}, t) = ... = \hat{r}(\bar{x}, t).$$

Osoitetaan seuraavaksi kuvauksen $\hat{r}$ jatkuvuus: Koska X on kompakti Hausdorffin avaruus, se on normaali (V:15.12), joten se on säännöllinen ja avaruus X/A on siten Hausdorffin avaruus (V: tehtävä 11:7). Nyt siis $X \times I$ on kompakti, $X/A \times I$ on Hausdorff, joten Lauseen V:15.16 nojalla $\pi \times \mathrm{id}$ on samastuskuvaus. Koska nyt $\hat{r} \circ (\pi \times \mathrm{id})$ on jatkuva ja $\pi \times \mathrm{id}$ on samastuskuvaus, on $\hat{r}$ jatkuva (kts. V:8.5 ja V:8.6).
Lisäksi

$$\hat{r}(\bar{x}, 0) = (\pi \times \mathrm{id})(r(x, 0)) = (\pi \times \mathrm{id})(x, 0) = (\bar{x}, 0)$$

jokaisella $\bar{x} \in X/A$ ja

$$\hat{r}(\{A\}, t) = (\pi \times \mathrm{id})(r(a, t)) = (\pi \times \mathrm{id})(a, t) = (\{A\}, t)$$

jokaisella $t \in I$ $(a \in A)$, joten $\hat{r}$ on retraktio.
b) Huomataan ensin, että jos X on avaruus, $x_0 \in X$ hyvä kantapiste ja $f\colon X \to Y$ homeomorfismi, jolla $f(x_0) = y_0$, niin myös y_0 on hyvä kantapiste: jos $r\colon X \times I \to (X \times 0) \cup (\{x_0\} \times I)$ on retraktio, niin yhdistetty kuvaus

$$Y \times I \xrightarrow{f^{-1}\times\mathrm{id}} X \times I \xrightarrow{\quad r \quad} (X \times 0) \cup (\{x_0\} \times I) \xrightarrow{f|\times\mathrm{id}} (Y \times 0) \cup (\{y_0\} \times I)$$

on retraktio, eli y_0 on hyvä kantapiste.
On olemassa homeomorfismi $\bar{\pi}\colon \bar{B}^n/S^{n-1} \to S^n$, jossa $\bar{\pi}(\{S^{n-1}\}) = e_{n+1}$ (kts. luennot, s. 4–5), joten a)-kohdan nojalla e_{n+1} on hyvä kantapiste S^n:lle. Jos

$p_0 \in S^n$ on mielivaltainen, on olemassa homeomorfismi $f\colon S^n \to S^n$, jolle $p_0 = e_{n+1}$, mistä seuraa, että myös p_0 on hyvä kantapiste.

6. a) Koska S^n on homogeeninen (kts. edellinen tehtävä), voidaan olettaa, että $p_0 = e_{n+1}$.
Osoitetaan ensin, että

$$\varphi\colon \{f \mid f\colon (S^n, e_{n+1}) \to (X, x_0)\ \text{jatkuva}\} \to \{g \mid g\colon (\bar{B}^n, S^{n-1}) \to (X, x_0)\ \text{jatkuva}\}$$

$$f \mapsto f \circ \pi$$

on bijektio.
φ on injektio: Jos $f \circ \pi = f' \circ \pi$, niin (koska π on surjektio), on $f = f'$.
φ on surjektio: Jos $g\colon \bar{B}^n \to X$ on jatkuva funktio siten, että $g(S^{n-1}) = x_0$, voidaan määritellä funktio $f\colon S^n \to X$ siten, että kaavio

$$\begin{tikzcd} \bar{B}^n \arrow[d, "\pi"'] \arrow[dr, "g"] & \\ S^n \arrow[r, "f"'] & X \end{tikzcd}$$

kommutoi: $f(y) = g(x)$, missä $x \in \pi^{-1}(y)$. Tässä

$$\pi^{-1}(y) = \begin{cases} 1\ \text{piste}, & \text{jos } y \neq e_{n+1} \\ S^{n-1}, & \text{jos } y = e_{n+1}. \end{cases}$$

Funktio f on hyvin määritelty, koska oletuksen nojalla $g(S^{n-1}) = x_0$. Koska $\bar{B}^n$ on kompakti ja S^n on Hausdorff, on π samastuskuvaus (V:15.16). Siis f on jatkuva (V:8.5), ja $f(e_{n+1}) = x_0$. Siis $g = f \circ \pi$, joten φ on surjektio.
Siis φ on bijektio.
Myös homotopioiden välille saadaan vastaavuus:

$$f \simeq f'\ \text{rel}\ e_{n+1} \;\Leftrightarrow\; f \circ \pi \simeq f' \circ \pi\ \text{rel}\ S^{n-1} :$$

Jos $K\colon f \simeq f'$ rel e_{n+1}, niin $H = K \circ (\pi \times \mathrm{id})\colon f \circ \pi \simeq f' \circ \pi$ rel S^{n-1}.
Jos taas $H\colon f \circ \pi \simeq f' \circ \pi$ rel S^{n-1}, niin voidaan määritellä K siten, että kaavio

$$\begin{tikzcd} \bar{B}^n \times I \arrow[d, "\pi \times \mathrm{id}"'] \arrow[dr, "H"] & \\ S^n \times I \arrow[r, "K"'] & X \end{tikzcd}$$

kommutoi (kuten yllä määriteltiin f). Jatkuvuus seuraa siitä, että $\pi \times \mathrm{id}$ on samastuskuvaus (sama perustelu kuin yllä). K on homotopia $f \simeq f'$ rel e_{n+1}. Tästä seuraa, että bijektion φ avulla saadaan bijektio

$$[f]_0 \mapsto [f \circ \pi]$$

homotopialuokkien joukkojen välille.

b) Voidaan todistaa vastaavasti kuin a)-kohta.