Homotopy theory
Harjoitus 8 (5.11.2015)

1. a) Consider the product group $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, with group operation given by $(m, n) + (m', n') = (m + m', n + n')$. Prove that the group $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ has the universal property, given in Proposition 4.3, for all Abelian groups G. In other words, if we denote $X = \{(1, 0), (0, 1)\}$, the generators of the group $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$, and $i: X \to \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ is the inclusion, then every function $f: X \to G$ to an Abelian group G can uniquely be extended to a homomorphism $\tilde{f}: \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \to G$ (that is $\tilde{f} \circ i = f$).
b) Prove by giving an example, that the assumption "G is an Abelian group" is essential, that is, the group $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ doesn't have this universal property for all groups G.

2. Prove item 3) in Example 4.6.

3. a) Prove Lemma 5.10: Let X and C be topological spaces, suppose that C is compact. If

$$\varphi: X \times C \to \mathbb{R}$$

is a continuous function, then also the function $f: X \to \mathbb{R}$ defined by

$$f(x) = \max_{c\in C} \varphi(x, c)$$

is continuous.
b) Give an example of a continuous function $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, for which $\max_{y\in\mathbb{R}} f(x, y)$ exists for every $x \in \mathbb{R}$, but the function

$$g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad g(x) = \max_{y\in\mathbb{R}} f(x, y),$$

is not continuous.

4. Prove that the inclusion $\{0\} \hookrightarrow I$ is a cofibration.

5. Prove Proposition 5.7.

6. Prove that the space $\mathbb{R}^2\setminus\mathbb{Q}^2$ is path connected. Prove that the fundamental group $\pi(\mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{Q}^2)$ is uncountable.

Homotopiateoria
Harjoitus 8 (5.11.2015)

1. a) Tarkastellaan tuloryhmää $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, laskutoimituksena $(m, n) + (m', n') = (m + m', n + n')$. Osoita, että ryhmällä $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ on Lausetta 4.3 vastaava universaaliominaisuus Abelin ryhmien G suhteen. Toisin sanoen, jos merkitään $X = \{(1, 0), (0, 1)\}$, eli ryhmän $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ virittäjät, ja $i\colon X \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ on inkluusio, niin jokainen funktio $f\colon X \to G$ Abelin ryhmään G voidaan yksikäsitteisesti laajentaa homomorfismiksi $\tilde{f}\colon \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to G$ (eli $\tilde{f} \circ i = f$).

b) Osoita esimerkillä, että oletus "G Abelin ryhmä" on oleellinen, eli ryhmällä $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ ei ole yllä mainittua universaaliominaisuutta kaikkien ryhmien suhteen.

2. Osoita Esimerkin 4.6 kohta 3).

3. a) Todista Lemma 5.10.

b) Anna esimerkki jatkuvasta funktiosta $f\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, jolla $\max_{y \in \mathbb{R}} f(x, y)$ on olemassa jokaisella $x \in \mathbb{R}$, mutta funktio

$$g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad g(x) = \max_{y \in \mathbb{R}} f(x, y),$$

ei ole jatkuva.

4. Osoita, että inkluusio $\{0\} \hookrightarrow I$ on kofibraatio.

5. Todista Lause 5.7.

6. Osoita, että avaruus $\mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{Q}^2$ on polkuyhtenäinen. Osoita, että perusryhmä $\pi(\mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{Q}^2)$ on ylinumeroituva.