Homotopiateoria
Harjoitus 8. Ratkaisuja.

1. a) Olkoon $X = \{(1,0),(0,1)\} \subset \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ ja $f: X \to G$ funktio, missä $(G,+)$ on mikä tahansa Abelin ryhmä. Määritellään

$$\tilde{f}: \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to G$$

kaavalla

$$(m,n) \mapsto m \cdot f(1,0) + n \cdot f(0,1).$$

Nyt $\tilde{f}(1,0) = 1 \cdot f(1,0) + 0 \cdot f(0,1) = f(0,1)$, vastaavasti $\tilde{f}(0,1) = 0 \cdot f(1,0) + 1 \cdot f(0,1) = f(0,1)$.
Kuvaus $\tilde{f}$ on homomorfismi, koska

$$\tilde{f}((m,n) + (m',n')) = \tilde{f}(m+m', n+n') = (m+m')f(1,0) + (n+n')f(0,1)$$

$$= m \cdot f(1,0) + n \cdot f(0,1) + m' \cdot f(1,0) + n' \cdot f(0,1) = \tilde{f}(m,n) + \tilde{f}(m',n').$$

Huom. kolmannessa välivaiheessa käytettiin oletusta "G Abelin ryhmä".
Yksikäsitteisyys: Jos $\hat{f}$ on mikä tahansa homomorfismi $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to G$, jolle $\hat{f}(1,0) = f(1,0)$ ja $\hat{f}(0,1) = f(0,1)$, niin

$$\hat{f}(m,n) = m \cdot \hat{f}(1,0) + n \cdot \hat{f}(0,1) = m \cdot f(1,0) + n \cdot f(0,1) = \tilde{f}(m,n)$$

jokaisella $m, n \in \mathbb{Z}$, joten $\hat{f} = \tilde{f}$. Ensimmäisessä välivaiheessa käytettiin oletusta "$\hat{f}$ homomorfismi". Tämä todistaa yksikäsitteisyyden.
b) Olkoon G mikä tahansa ei-kommutatiivinen ryhmä ja $a, b \in G$ siten, että $ab \neq ba$. Tällöin funktiota $f: X \to G$, $f(1,0) = a$, $f(0,1) = b$, ei voida jatkaa homomorfismiksi $\tilde{f}: \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to G$, koska tällöin olisi

$$ab = \tilde{f}(1,0) \cdot \tilde{f}(0,1) = \tilde{f}((1,0)+(0,1)) = \tilde{f}((0,1)+(1,0)) = \tilde{f}(0,1) \cdot \tilde{f}(1,0) = ba,$$

mikä on ristiriita alkioiden a, b valinnan kanssa.

2. Määritellään ensin $\psi_1: \mathbb{Z} \to F(\{a,b\})$, $\psi_1(n) = a^n$, $\psi_1(0) = 1$, "tyhjä sana". Vastaavasti $\psi_2: \mathbb{Z} \to F(\{a,b\})$, $\psi_2(n) = b^n$, $\psi_2(0) = 1$. Nämä ovat selvästi homomorfismeja, joten harjoitustehtävän 7:6 nojalla saadaan homomorfismi $\psi: \mathbb{Z} * \mathbb{Z} \to F(\{a,b\})$, jolle $\psi \circ \varphi_i = \psi_i$, $i = 1,2$. Tässä funktiot φ_i ovat kuten tehtävässä 7:6.

Koska $\psi(10) = \psi(\varphi_1(1)) = \psi_1(1) = a$ ja $\psi(01) = \psi(\varphi_2(1)) = \psi_2(1) = b$, ja alkiot a ja b virittävät ryhmän $F(\{a,b\})$, on ψ surjektio.
Injektiivisyys: Jos $x_1 \cdots x_{2n} \in \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$ ja $\psi(x_1 \cdots x_{2n}) = 1$, niin

$$\psi(x_1 \cdots x_{2n}) = \psi_1(x_1)\psi_2(x_2) \cdots \psi_2(x_{2n}) = a^{x_1} b^{x_2} \cdots b^{x_{2n}} = 1.$$

Tästä seuraa, että $x_1 = x_2 = \dots = x_{2n} = 0$, jolloin $x_1 \cdots x_{2n} = 00$, neutraalialkio ryhmässä $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}$. Siis ψ on injektio.
Saatiin, että ψ on isomorfismi $\mathbb{Z} * \mathbb{Z} \to F(\{a,b\})$.

3. a) Funktion määritelmä on mielekäs, koska kompaktissa joukossa C määritelty jatkuva kuvaus $c \mapsto \varphi(x,c)$ saavuttaa suurimman arvonsa.
Olkoon $x \in X,\ f(x) = y$ ja $\epsilon > 0$.
Tällöin $\varphi(x,c) \leq y$ jokaisella $c \in C$. Koska φ on jatkuva, jokaista $c \in C$ kohti on olemassa pisteiden x ja c ympäristöt U_c ja V_c siten, että $\varphi(U_c \times V_c) \subset]-\infty, y+\epsilon[$. Koska C on kompakti, sen peitteellä $\{V_c\}_{c \in C}$ on äärellinen osapeite $\{V_{c_i}\}_{i=1}^n$. Tällöin $U_1 = \cap_{i=1}^n U_{c_i}$ on x:n ympäristö, joka toteuttaa

$$\varphi(U_1 \times C) \subset \,]-\infty, y+\epsilon[,$$

jolloin myös

$$f(U_1) \subset \,]-\infty, y+\epsilon[. \tag{$*$}$$

Toisaalta $y = f(x) = \varphi(x, c_0)$ jollakin $c_0 \in C$. Koska φ on jatkuva, on olemassa x:n ympäristö U_2 siten, että

$$\varphi(U_2 \times \{c_0\}) \subset \,]y-\epsilon, y+\epsilon[. \tag{$**$}$$

Jos nyt $x' \in U_1 \cap U_2$, niin $(*)$:n nojalla

$$f(x') < y + \epsilon,$$

ja $(**)$:n nojalla

$$f(x') = \max_{c \in C} \varphi(x', c) \geq \varphi(x', c_0) > y - \epsilon,$$

joten

$$f(U_1 \cap U_2) \subset \,]y-\epsilon, y+\epsilon[.$$

Tämä todistaa jatkuvuuden.

b) Esim. $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \min\{|xy|, 1\}$. Jos $x = 0$, on $f(x,y) = 0$ jokaisella y, joten $g(0) = 0$. Jos $x \neq 0$, niin on olemassa $y \in \mathbb{R}$ siten, että $|xy| = 1$, joten $g(x) = 1$ jokaisella $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Siis g on epäjatkuva.

4. Määritellään retraktio $r\colon I \times I \to I \times 0 \cup 0 \times I$ projisioimalla pisteestä $(2,2)$:

$$r(x,t) = \begin{cases} \left(2 - 2\frac{x-2}{t-2}, 0\right), & x \geq t \\ \left(0, 2 - 2\frac{t-2}{x-2}\right), & x \leq t. \end{cases}$$

Väite seuraa nyt Lauseesta 5.5.

Yksinkertaisempikin kaava löytyy (Silja Polvi):

$$r(x,t) = \begin{cases} (0, t-x), & x \leq t \\ (x-t, 0), & x \geq t. \end{cases}$$

5. 1) Jos $f\colon X \to Y$ on jatkuva kuvaus ja $H\colon X \times I \to Y$ homotopia, jolle $H(x,0) = f(x)$ jokaisella $x \in X$, niin H itse on vaadittu homotopia $X \times I \to Y$.

2) Oletetaan, että $i\colon A \to X$ ja $j\colon X \to Z$ ovat kofibraatioita. Osoitetaan, että $j \circ i\colon A \to Z$ on kofibraatio.

Olkoon Y avaruus, $f\colon Z \to Y$ jatkuva ja $H\colon A \times I \to Y$ homotopia siten, että $H(a,0) = f(a)$ jokaisella $a \in A$.

Nyt $f \circ j\colon X \to Y$ on jatkuva ja $H(a,0) = f(a) = f \circ j(a)$ jokaisella $a \in A$. Koska $i\colon A \to X$ on kofibraatio, on olemassa homotopia $H'\colon X \times I \to Y$ siten, että $H'(x,0) = f \circ j(x) = f(x)$ jokaisella $x \in X$ ja $H'(a,t) = H(a,t)$ jokaisella $a \in A,\ t \in I$.

Seuraavaksi sovelletaan kuvauksen j kofibraatio-ominaisuutta kuvauksiin f ja H': Nyt $f\colon Z \to Y$ on jatkuva ja $H'\colon X \times I \to Y$ on homotopia siten, että $H'(x,0) = f(x)$ jokaisella $x \in X$, joten on olemassa homotopia $F\colon Z \times I \to Y$ siten, että $F(z,0) = f(z)$ jokaisella $z \in Z$ ja $F(x,t) = H'(x,t)$ jokaisella $x \in X,\ t \in I$.

Nyt F on etsitty homotopia, koska $F(z,0) = f(z)$ jokaisella $z \in Z$ ja $F(a,t) = H'(a,t) = H(a,t)$ jokaisella $a \in A,\ t \in I$.

$$\begin{tikzcd}
A\times 0 \arrow[r, hook] \arrow[d, hook] & A\times I \arrow[d, hook] \arrow[dddr, "H"] & \\
X\times 0 \arrow[r, hook] \arrow[d, hook] & X\times I \arrow[d, hook] \arrow[ddr, dotted, "H'"] & \\
Z\times 0 \arrow[r, hook] \arrow[drr, "f"'] & Z\times I \arrow[dr, dotted, "F"] & \\
 & & Y
\end{tikzcd}$$

Huom. Tehtävän voi ratkaista myös käyttämällä retraktio-karakterisointia (Juho Leppänen): Jos $r_1\colon X\times I \to X\times 0 \cup A\times I$ ja $r_2\colon Z\times I \to Z\times 0\cup X\times I$ ovat retraktioita, niin retraktio $r\colon Z\times I \to Z\times 0\cup A\times I$ voidaan määritellä kaavalla

$$r(x,t) = \begin{cases} r_2(x,t), & (x,t)\in r_2^{-1}(Z\times 0) \\ r_1(r_2(x,t)), & (x,t)\in r_2^{-1}(X\times I). \end{cases}$$

3) Koska $A \hookrightarrow X$ on kofibraatio, niin on olemassa retraktio

$$r\colon X\times I \to X\times 0\cup A\times I$$

Lauseen 5.5 nojalla. On helppo tarkistaa, että

$$R\colon (B\times X)\times I \to ((B\times X)\times 0)\cup((B\times A)\times I)$$

$$R(b,x,t) = (b, r(x,t)),$$

on retraktio. Siis Lauseen 5.5 nojalla $B\times A \hookrightarrow B\times X$ on kofibraatio.

6. a) Jos $a,b\in\mathbb{R}$, merkitään pisteiden a ja b välistä janaa symbolilla $[a,b]$ (vaikka olisi $a>b$). Jos $a=b$, on $[a,b]=\{a\}$.
Olkoot $(x_1,y_1),(x_2,y_2)\in\mathbb{R}^2\setminus\mathbb{Q}^2$. Nyt siis x_1 tai y_1 on irrationaalinen. Tilanne on symmetrinen koordinaattien suhteen, joten voidaan olettaa, että x_1 on irrationaalinen. Koska x_2 tai y_2 on irrationaalinen, saadaan kaksi tapausta:
1) y_2 irrationaalinen: tällöin jana $\{x_1\}\times[y_1,y_2]\subset\mathbb{R}^2\setminus\mathbb{Q}^2$, koska x_1 on irrationaalinen. Samoin jana $[x_1,x_2]\times\{y_2\}\subset\mathbb{R}^2\setminus\mathbb{Q}^2$, koska y_2 on irrationaalinen. Näiden kahden janan muodostama murtoviiva antaa polun pisteestä (x_1,y_1) pisteeseen (x_2,y_2) avaruudessa $\mathbb{R}^2\setminus\mathbb{Q}^2$.

2) x_2 irrationaalinen: valitaan ensin irrationaaliluku r. Nyt jana $\{x_1\} \times [y_1, r] \subset \mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{Q}^2$, koska x_1 on irrationaalinen, jana $[x_1, x_2] \times \{r\} \subset \mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{Q}^2$, koska r on irrationaalinen ja jana $\{x_2\} \times [r, y_2] \subset \mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{Q}^2$, koska x_2 on irrationaalinen. Näiden janojen yhdiste antaa halutun polun.

b) Valitaan kantapiste (x_0, y_0), $x_0, y_0 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Olkoon $r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Tarkastellaan silmukkaa α_r, joka muodostuu janoista $\{x_0\} \times [y_0, r]$, $[x_0, x_0 + 1] \times \{r\}$, $\{x_0 + 1\} \times [y_0, r]$ ja $[x_0, x_0 + 1] \times \{y_0\}$. Siis α_r on silmukka avaruudessa $\mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{Q}^2$.
Olkoot nyt $r' > r > y_0$, $r, r' \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Tällaisia lukuja on ylinumeroituva määrä.
Osoitetaan, että $\alpha_r \not\simeq \alpha_{r'}$ avaruudessa $\mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{Q}^2$. Tällöin homotopialuokkia on ylinumeroituva määrä eli perusryhmä on ylinumeroituva.
Valitaan $a \in \mathbb{Q} \cap \,]x_0, x_0 + 1[$ ja $b \in \mathbb{Q} \cap \,]r, r'[$. Nyt piste (a, b) on silmukan $\alpha_{r'}$ "sisällä", mutta silmukan α_r "ulkopuolella". Voidaan pitää tunnettuna, että tällöin $\alpha_r \not\simeq \alpha_{r'}$ avaruudessa $\mathbb{R}^2 \setminus \{(a, b)\}$, joten ne eivät ole polkuhomotooppiset myöskään avaruudessa $\mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{Q}^2$ (koska $\mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{Q}^2 \subset \mathbb{R}^2 \setminus \{(a, b)\}$).