Homotopy theory
Exercise 7 (29.10.2015)

1. Suppose $p, q \in \mathbb{R}^2$, $p \neq q$ and $X = \mathbb{R}^2 \setminus \{p, q\}$. The space X is homotopy equivalent to a space which has appeared in previous examples? Which one? Here you don't need to present exact formulas, a suitable picture is sufficient.

2. Let $n \in \{2, 3, ...\}$. Prove that every continuous map $f\colon S^n \to S^1$ is null homotopic. (Hint: the lifting theorem)

3. a) Prove that every continuous map $f\colon P^2 \to S^1$ is null homotopic (P^2 is the projective plane). (Hint: the lifting theorem)
b) Give an example of a continuous map $f\colon T^2 \to S^1$, which is not null homotopic.

4. Prove Proposition 2.15.

5. Consider the one point union $X = S^1 \vee S^2$. Construct a universal covering space for X (hint: V:25.5). Prove in detail, that the space you constructed, is simply connected.

6. Let G_1, G_2 be groups; denote the neutral elements by $e_1 \in G_1, e_2 \in G_2$. Prove that the free product $G_1 * G_2$ has the following universal property: If H is any group and $\psi_i\colon G_i \to H$ are homomorphisms, $i = 1, 2$, then there exists a unique homomorphism $\psi\colon G_1 * G_2 \to H$ such, that $\psi \circ \varphi_i = \psi_i$, $i = 1, 2$. (Here $\varphi_1\colon G_1 \to G_1 * G_2$ and $\varphi_2\colon G_2 \to G_1 * G_2$ are the "embeddings" $g_1 \mapsto g_1 e_2$ and $g_2 \mapsto e_1 g_2$.)

$$\begin{tikzcd}
G_1 \arrow[dr, "\varphi_1"'] \arrow[drr, "\psi_1"] & & \\
& G_1 * G_2 \arrow[r, dotted, "\psi"] & H \\
G_2 \arrow[ur, "\varphi_2"] \arrow[urr, "\psi_2"'] & &
\end{tikzcd}$$

Homotopiateoria
Harjoitus 7 (29.10.2015)

1. Olkoot $p, q \in \mathbb{R}^2$, $p \neq q$ ja $X = \mathbb{R}^2 \setminus \{p, q\}$. Minkä aiemmin esimerkeissä esiintyneen avaruuden kanssa X on homotopiaekvivalentti? Tässä ei tarvitse esittää tarkkoja lausekkeita, sopiva kuvio tms. riittää.

2. Olkoon $n \in \{2, 3, ...\}$. Osoita, että jokainen jatkuva kuvaus $f\colon S^n \to S^1$ on nollahomotooppinen. (Vihje: nostolause)

3. a) Osoita, että jokainen jatkuva kuvaus $f\colon P^2 \to S^1$ on nollahomotooppinen (P^2 on projektiivinen taso). (Vihje: nostolause)
b) Anna esimerkki jatkuvasta funktiosta $f\colon T^2 \to S^1$, joka ei ole nollahomotooppinen.

4. Todista Lause 2.15.

5. Tarkastellaan yhden pisteen yhdistettä $X = S^1 \vee S^2$. Konstruoi X:lle universaalipeiteavaruus (vihje: V:25.5). Osoita yksityiskohtaisesti, että konstruoimasi avaruus on yhdesti yhtenäinen.

6. Olkoot G_1, G_2 ryhmiä; merkitään neutraalialkioita $e_1 \in G_1, e_2 \in G_2$. Osoita, että vapaalla tulolla $G_1 * G_2$ on seuraava universaaliominaisuus: Jos H on mikä tahansa ryhmä ja $\psi_i\colon G_i \to H$ ovat homomorfismeja, $i = 1, 2$, niin on olemassa yksikäsitteinen homomorfismi $\psi\colon G_1 * G_2 \to H$ siten, että $\psi \circ \varphi_i = \psi_i$, $i = 1, 2$.
(Tässä $\varphi_1\colon G_1 \to G_1 * G_2$ ja $\varphi_2\colon G_2 \to G_1 * G_2$ ovat "upotukset" $g_1 \mapsto g_1 e_2$ ja $g_2 \mapsto e_1 g_2$.)

$$\begin{tikzcd}
G_1 \arrow[dr, "\varphi_1"'] \arrow[drr, "\psi_1"] & & \\
& G_1 * G_2 \arrow[r, dotted, "\psi"] & H \\
G_2 \arrow[ur, "\varphi_2"] \arrow[urr, "\psi_2"'] & &
\end{tikzcd}$$