Homotopiateoria
Harjoitus 7. Ratkaisuja.

1. Vastaus: yhden pisteen yhdisteen $Y = S^1 \vee S^1$ kanssa. Selitys: upotetaan Y tasoon $\mathbb{R}^2$ siten, että pisteet p ja q jäävät ympyröiden sisälle, esimerkiksi

$$Y = S(p, \frac{|p-q|}{2}) \cup S(q, \frac{|p-q|}{2}).$$

Nyt Y on avaruuden $\mathbb{R}^2 \setminus \{p, q\}$ vahva deformaatioretrakti (piirrä kuva!), erityisesti ne ovat homotopiaekvivalentit.

2. Tarkastellaan kaaviota

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{R} \arrow[d, "p"] \\ S^n \arrow[ur, dotted, "\tilde{f}"] \arrow[r, "f"'] & S^1 \end{tikzcd}$$

Merkitään $e_{n+1} = (0, ..., 0, 1) \in S^n$ ja $s_0 = f(e_{n+1})$. Valitaan $x_0 \in p^{-1}(s_0)$. Olkoon $p\colon \mathbb{R} \to S^1$ tuttu peitekuvaus. Koska S^n on yhdesti yhtenäinen (Lause 1.6), niin

$$0 = f_*\pi(S^n, e_{n+1}) \subset p_*\pi(\mathbb{R}, x_0),$$

joten nostolauseen 2.9 nojalla f:llä on nosto $\tilde{f}\colon S^n \to \mathbb{R}$, jolle $\tilde{f}(e_{n+1}) = x_0$. Määritellään

$$H\colon S^n \times I \to S^1$$

kaavalla

$$H(x,t) = p((1-t)\tilde{f}(x)).$$

Nyt H on jatkuva ja $H(x, 0) = p(\tilde{f}(x)) = f(x)$ ja $H(x, 1) = p(0)$ jokaisella $x \in S^n$. Siis f on homotooppinen vakiokuvauksen kanssa.

3. a) Tarkastellaan kaaviota

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{R} \arrow[d, "p"] \\ P^2 \arrow[ur, dotted, "\tilde{f}"] \arrow[r, "f"'] & S^1 \end{tikzcd}$$

Valitaan kantapisteet $p_0 \in P^2$, $s_0 = f(p_0)$ ja $x_0 \in p^{-1}(s_0)$. Koska $\pi(P^2, p_0) \cong \mathbb{Z}_2$ on äärellinen, on myös $f_* \pi(P^2, p_0)$ äärellinen. Toisaalta $\pi(S^1, s_0) \cong \mathbb{Z}$ ja ryhmän $\mathbb{Z}$ ainoa äärellinen aliryhmä on $\{0\}$, joten välttämättä $f_*\pi(P^2, p_0) = \{0\}$. Siis nostolausetta voidaan taas käyttää ja saadaan $\tilde{f}\colon P^2 \to \mathbb{R}$. Määritellään

$$H\colon P^2 \times I \to S^1$$

kaavalla

$$H(x,t) = p((1-t)\tilde{f}(x)).$$

Kuten tehtävässä 2 nähdään, että f on nollahomotooppinen.

b) Määritellään $f\colon T^2 = S^1 \times S^1 \to S^1$ kaavalla $f(x,y) = x$, $x, y \in S^1$. Osoitetaan, että f ei ole nollahomotooppinen. Olkoon $g\colon S^1 \to S^1 \times S^1$ kuvaus $g(x) = (x, 1)$, $x \in S^1$. Nyt $f \circ g = \mathrm{id}_{S^1}$. Jos f olisi homotooppinen vakiokuvauksen c_{x_0} kanssa, olisi $\mathrm{id}_{S^1} = f \circ g \simeq c_{x_0} \circ g$, joka on vakiokuvaus. Tämä on ristiriita, koska tunnetusti id_{S^1} ei ole nollahomotooppinen.

4. Osoitetaan, että f on surjektio: olkoon $x_2 \in X_2$ mielivaltainen. Valitaan kantapiste $\bar{x}_1 \in X_1$, merkitään $\bar{x}_2 = f(\bar{x}_1)$, $y = p_1(\bar{x}_1) = p_2(\bar{x}_2)$. Valitaan polku $\alpha\colon I \to X_2$ pisteestä $\bar{x}_2$ pisteeseen x_2 ja olkoon $g = p_2 \circ \alpha$. Polulla g on yksikäsitteinen nosto $\tilde{g}\colon I \to X_1$ siten, että $p_1 \circ \tilde{g} = g$ ja $\tilde{g}(0) = \bar{x}_1$. Olkoon $x = \tilde{g}(1)$. Tällöin poluilla $f \circ \tilde{g}$ ja α on sama alkupiste $\bar{x}_2$ ja $p_2 \circ f \circ \tilde{g} = p_1 \circ \tilde{g} = g = p_2 \circ \alpha$, joten Korollaarin 2.8 nojalla $f \circ \tilde{g} = \alpha$. Siis $f(x) = f(\tilde{g}(1)) = \alpha(1) = x_2$.

Olkoon edelleen $x_2 \in X_2$ mielivaltainen. Konstruoidaan pisteelle x_2 peiteympäristö. Olkoon V pisteen $p_2(x_2) \in Y$ yhtenäinen ympäristö, joka on peiteympäristö molemmille peitekuvauksille p_1 ja p_2 (kahden peiteympäristön leikkauksen sisältä voidaan valita (polku)yhtenäinen ympäristö). Olkoot

$$p_2^{-1}V = \bigcup_{j \in J} U_j \quad \text{ja} \quad p_1^{-1}V = \bigcup_{i \in I} U'_i$$

kuten peiteavaruuden määritelmässä. Koska V on yhtenäinen, niin joukot U_j ovat täsmälleen joukon $p_2^{-1}V$ yhtenäiset komponentit, vastaavasti joukot U'_i ovat joukon $p_1^{-1}V$ komponentit. Olkoon $j_0 \in J$ se indeksi, jolla $x_2 \in U_{j_0}$, osoitetaan, että tämä on peiteympäristö kuvaukselle f.

Selvästi

$$f^{-1}U_{j_0} \subset p_1^{-1}V = \bigcup_{i \in I} U'_i.$$

Koska joukot U_i' ovat yhtenäisiä, on aina joko $f(U_i') \subset U_{j_0}$ tai $f(U_i') \cap U_{j_0} = \emptyset$. Merkitään

$$K = \{i \in I \mid f(U_i') \subset U_{j_0}\},$$

jolloin

$$f^{-1}U_{j_0} \subset \bigcup_{i \in K} U_i'.$$

Jos merkitään homeomorfismeja $p_1^i \colon U_i' \to V$ ja $p_2^{j_0} \colon U_{j_0} \to V$, niin välttämättä

$$f|U_i' = (p_2^{j_0})^{-1} \circ p_1^i$$

jokaisella $i \in K$, eli homeomorfismi. Nähdään siis, että $f^{-1}U_{j_0} = \cup_{i \in K} U_i'$ ja $f|U_i'$ on homeomorfismi $U_i' \to U_{j_0}$.

5. Universaalipeiteavaruudeksi $\tilde{X}$ kelpaa esim. reaaliakseli, johon jokaisen kokonaisluvun kohdalle on liitetty pallo S^2 (vastaavasti kuten esimerkissä V:25.5, jossa on liitetty ympyröitä S^1). Jos merkitään $L = \{(x, 0, 0) \mid x \in \mathbb{R}\}$ ja $C_n = S^2((n, 1/4, 0), 1/4)$, $n \in \mathbb{Z}$, voidaan $\tilde{X}$ ajatella $\mathbb{R}^3$:n osajoukkona

$$\tilde{X} = L \cup \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} C_n.$$

Myös peitekuvaus $p \colon \tilde{X} \to X$ voidaan määritellä vastaavasti kuin esimerkissä V:25.5.

Osoitetaan vielä yhdesti yhtenäisyys: Koska jokaisen pallon C_n jokainen piste voidaan yhdistää polulla pisteeseen $(n, 0, 0) \in L$ ja suora L on polkuyhtenäinen, nähdään, että $\tilde{X}$ on polkuyhtenäinen.

Tarkastellaan ensin osaa avaruudesta $\tilde{X}$. Olkoon V_n x-akselin janan $]n-1, n+1[$ ja pallon C_n yhdiste. Koska jana $]n-1, n+1[$ voidaan deformoida pisteeksi n, nähdään, että $V_n \simeq C_n$, joka on yhdesti yhtenäinen. Jos tarkastellaan yhdistettä $V_n \cup V_{n+1}$, havaitaan, että se on yhdesti yhtenäinen Seifertin-van Kampenin lauseen 1.4 nojalla (V_n, V_{n+1} ovat avoimia ja yhdesti yhtenäisiä, leikkaus $V_n \cap V_{n+1}$ on avoin jana eli polkuyhtenäinen). Induktiolla nähdään, että

$$U_k = \bigcup_{n=-k}^{k} V_n$$

on yhdesti yhtenäinen jokaisella $n = 1, 2, \ldots$ Nyt $\tilde{X}$ on yhdiste nousevasta jonosta avoimia yhdesti yhtenäisiä joukkoja $U_1 \subset U_2 \subset \ldots$, joten $\tilde{X}$ on yhdesti yhtenäinen harjoitustehtävän V:23:11 nojalla.

6. Jos $x_1 \cdots x_{2n} \in G_1 * G_2$, määritellään

$$\psi(x_1 \cdots x_{2n}) = \psi_1(x_1)\psi_2(x_2) \cdots \psi_2(x_{2n}) \in H.$$

Homomorfismiehto

$$\psi((x_1 \cdots x_{2n})(y_1 \cdots y_{2m})) = \psi(x_1 \cdots x_{2n})\psi(y_1 \cdots y_{2m})$$

on selvä, kunhan huomataan, että mahdollinen neutraalialkion poisto (jos esim. x_{2n} tai y_1 on neutraalialkio) ja kahden peräkkäisen samaan ryhmään kuuluvan alkion yhdistäminen eivät aiheuta ongelmia (koska kuvaukset ψ_i ovat homomorfismeja ja kuvaavat neutraalialkion neutraalialkiolle).
Ehto $\psi \circ \varphi_i = \psi_i$: Jos $g_1 \in G_1$, niin

$$\psi \circ \varphi_1(g_1) = \psi(g_1 e_2) = \psi_1(g_1)\psi_2(e_2) = \psi_1(g_1) \cdot e_H = \psi_1(g_1).$$

Vastaavasti $\psi \circ \varphi_2 = \psi_2$.
Yksikäsitteisyys: Jos $\bar{\psi}\colon G_1 * G_2 \to H$ on homomorfismi, jolle $\bar{\psi} \circ \varphi_i = \psi_i,\ i = 1, 2$, niin

$$\bar{\psi}(x_1 \cdots x_{2n}) = \bar{\psi}((x_1 e_2)(e_1 x_2) \cdots (e_1 x_{2n})) = \bar{\psi}(x_1 e_2)\bar{\psi}(e_1 x_2) \cdots \bar{\psi}(e_1 x_{2n})$$

$$= \bar{\psi}(\varphi_1(x_1))\bar{\psi}(\varphi_2(x_2)) \cdots \bar{\psi}(\varphi_2(x_{2n})) = \psi_1(x_1)\psi_2(x_2) \cdots \psi_2(x_{2n}) = \psi(x_1 \cdots x_{2n}).$$

Toisessa välivaiheessa käytettiin oletusta, että $\bar{\psi}$ on homomorfismi ja neljännessä oletusta $\bar{\psi} \circ \varphi_i = \psi_i$.