Homotopy theory
Exercise 6 (15.10.2015)

1. Continuation to Exercise 2 of last week.
a) Recall what are the subgroups of $(\mathbb{Z}, +)$. What are the conjugacy classes?
b) What can we conclude from this information using Propositions 2.5 and 2.14?

2. a) Väisälä, p. 175, Exercise 24:5.
Suppose $f_1 \colon X_1 \to Y_1$ and $f_2 \colon X_2 \to Y_2$ are covering maps. Prove that the product map $f_1 \times f_2 \colon X_1 \times X_2 \to Y_1 \times Y_2$ is a covering map.
b) Give a few examples of covering spaces $p \colon X \to T^2$, where T^2 is the torus. Especially give an example where X is simply connected.

3. a) Let $X = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 2, 0 \leq z \leq 1\}$. Calculate $\pi(X)$.
b) Let $X = (\bar{B}^2 \times \{0\}) \cup (S^1 \times I) \subset \mathbb{R}^3$. Calculate $\pi(X)$.
c) Let $X = S^2 \vee S^2$ the one point union. Calculate $\pi(X)$.

4. a) Let G be a group, $H \leq G$ and $g \in G$. Prove that the function $h \mapsto g^{-1}hg$ is a bijection $H \to g^{-1}Hg$.
b) Let

$$G = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \,\middle|\, a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0 \right\}.$$

Equipped with matrix multiplication G is a group and

$$H = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \,\middle|\, n \in \mathbb{Z} \right\}$$

is a subgroup of G. The subgroup H is isomorphic with a familiar group, which? Let

$$g = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in G.$$

Prove that $g^{-1}Hg \subsetneq H$.

5. Consider the covering maps $f_n\colon S^1 \to S^1$, $f_n(z) = z^n$, $n = 1, 2, ...,$ and the diagram

$$\begin{tikzcd} & (S^1, 1) \arrow[d, "f_n"] \\ (S^1, 1) \arrow[ur, dotted, "\tilde{f}_m"] \arrow[r, "f_m"'] & (S^1, 1) \end{tikzcd}$$

Does there exist a lift $\tilde{f}_m$, if $m = 4, n = 2$? Or if $m = 3, n = 2$? Give a necessary and sufficient condition (for the numbers m and n) for a lift to exist.

6. Prove Propositions 2.13 and 2.14.

7. Answer to the course questionnaire in the webpages (before Thursday 15.10.): The department front page (in English) $\to$ Studies $\to$ Feedback to the teacher

Homotopiateoria
Harjoitus 6 (15.10.2015)

1. Jatkoa harjoitusten 5 tehtävään 2.
a) Palauta mieleen (Algebra I), mitkä ovat ryhmän $(\mathbb{Z},+)$ aliryhmät. Mitkä ovat konjugaatioluokat?

b) Mitä tästä voidaan päätellä Lauseiden 2.5 ja 2.14 avulla?

2. a) Väisälä, s. 175, tehtävä 24:5

b) Anna muutama esimerkki peitekuvauksista $p\colon X \to T^2$, missä T^2 on toruspinta. Erityisesti sellainen esimerkki, jossa X on yhdesti yhtenäinen.

3. a) Olkoon $X = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 1 \le x^2+y^2 \le 2, 0 \le z \le 1\}$. Laske $\pi(X)$.

b) Olkoon $X = (\bar{B}^2 \times \{0\}) \cup (S^1 \times I) \subset \mathbb{R}^3$. Laske $\pi(X)$.

c) Olkoon $X = S^2 \vee S^2$ yhden pisteen yhdiste. Laske $\pi(X)$.

4. a) Olkoon G ryhmä, $H \le G$ ja $g \in G$. Osoita, että funktio $h \mapsto g^{-1}hg$ on bijektio $H \to g^{-1}Hg$.
b) Olkoon

$$G = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \,\middle|\, a,b \in \mathbb{R}, a \neq 0 \right\}.$$

Matriisien kertolaskulla varustettuna G on ryhmä ja

$$H = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \,\middle|\, n \in \mathbb{Z} \right\}$$

on G:n aliryhmä. Minkä tutun ryhmän kanssa H on isomorfinen? Olkoon

$$g = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in G.$$

Osoita, että $g^{-1}Hg \subsetneq H$.

5. Tarkastellaan peitekuvauksia $f_n\colon S^1 \to S^1$, $f_n(z) = z^n$, $n = 1, 2, ...,$ ja kaaviota

$$\begin{tikzcd}
 & (S^1, 1) \arrow[d, "f_n"] \\
(S^1, 1) \arrow[ur, dotted, "\tilde{f}_m"] \arrow[r, "f_m"'] & (S^1, 1)
\end{tikzcd}$$

Onko nostoa $\tilde{f}_m$ olemassa, jos $m = 4, n = 2$? Entä jos $m = 3, n = 2$? Keksi välttämätön ja riittävä ehto (luvuille m ja n) noston olemassaololle.

6. Todista Lauseet 2.13 ja 2.14.

7. Vastaa kurssikyselyyn laitoksen nettisivuilla (torstaihin 15.10. mennessä): Laitoksen etusivu $\to$ Opiskelu $\to$ Palautetta opettajalle