Homotopiateoria
Harjoitus 6. Ratkaisuja.

1. a) Kaikki aliryhmät ovat ryhmät $n\mathbb{Z}$, $n = 0, 1, 2, ...$ Arvolla $n = 0$ saadaan aliryhmä $\{0\}$, arvolla $n = 1$ saadaan $\mathbb{Z}$, arvolla $n = 2$ parilliset luvut jne. Koska $(\mathbb{Z}, +)$ on Abelin ryhmä, on $[n\mathbb{Z}] = \{n\mathbb{Z}\}$ jokaisella $n \in \{0, 1, 2, ...\}$.
b) Olkoon (X, p) yhtenäinen ja lokaalisti polkuyhtenäinen peiteavaruus S^1:lle. Valitaan $x_0 \in p^{-1}(1)$ ja samastetaan $\pi(S^1, 1) \cong (\mathbb{Z}, +)$ kuten aiemmin. Ylläolevan nojalla $p_*\pi(X, x_0) = n\mathbb{Z}$ jollakin $n \in \{0, 1, 2, ...\}$.
1) Tapaus $n = 0$ eli $p_*\pi(X, x_0) = 0$. Merkitään $\bar{p}: \mathbb{R} \to S^1$ peitekuvausta $\bar{p}(x) = e^{2\pi ix}$. Nyt $p_*\pi(X, x_0) = \bar{p}_*\pi(\mathbb{R}, 0) = 0$, joten Lauseen 2.14 nojalla peiteavaruudet (X, p) ja $(\mathbb{R}, \bar{p})$ ovat isomorfiset.
2) Tapaus $n \geq 1$. Merkitään $p_n: S^1 \to S^1$ peitekuvausta $p_n(z) = z^n$. Nyt $p_*\pi(X, x_0) = (p_n)_*\pi(S^1, 1) = n\mathbb{Z}$, joten Lauseen 2.14 nojalla peiteavaruudet (X, p) ja (S^1, p_n) ovat isomorfiset.
Voimme siis päätellä, että jokainen yhtenäinen ja lokaalisti polkuyhtenäinen peiteavaruus S^1:lle on isomorfinen jonkin esimerkeissämme esiintyneen peiteavaruuden kanssa. Lisäksi Lauseen 2.5 avulla nähdään, että mitkään näistä peiteavaruuksista eivät ole isomorfisia keskenään.

2. Olkoon $(y_1, y_2) \in Y_1 \times Y_2$. Koska f_1 ja f_2 ovat surjektioita, niin on olemassa $x_1 \in X_1$ ja $x_2 \in X_2$ siten, että $f_1(x_1) = y_1$ ja $f_2(x_2) = y_2$. Nyt $(f_1 \times f_2)(x_1, x_2) = (y_1, y_2)$, joten $f_1 \times f_2$ on surjektio.
Olkoon $(y_1, y_2) \in Y_1 \times Y_2$. Olkoon $V_1 \subset Y_1$ pisteen y_1 peiteympäristö ja $V_2 \subset Y_2$ pisteen y_2 peiteympäristö,

$$p_1^{-1}(V_1) = \bigcup_{j \in J_1} U_j, \quad p_2^{-1}(V_2) = \bigcup_{j' \in J_2} U'_{j'}$$

kuten määritelmässä. Nyt $V_1 \times V_2$ on pisteen (y_1, y_2) ympäristö ja ei ole vaikea tarkistaa, että

$$(p_1 \times p_2)^{-1}(V_1 \times V_2) = \bigcup_{(j,j') \in J_1 \times J_2} U_j \times U'_{j'},$$

missä joukot $U_j \times U'_{j'}$ ovat erillisiä ja avoimia. Myös $(p_1 \times p_2)|: U_j \times U'_{j'} \to V_1 \times V_2$ on homeomorfismi, koska $p_1|: U_j \to V_1$ ja $p_2|: U'_{j'} \to V_2$ ovat homeomorfismeja.

Siis $V_1 \times V_2$ on pisteen (y_1, y_2) peiteympäristö.

b) Esimerkkejä:

- $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \to S^1 \times S^1,\ (s,t) \mapsto (e^{2\pi is}, e^{2\pi it})$
- $\mathbb{R} \times S^1 \to S^1 \times S^1,\ (s,z) \mapsto (e^{2\pi is}, z^n),\ n = 1, 2, ...$
- $S^1 \times S^1 \to S^1 \times S^1,\ (z_1, z_2) \mapsto (z_1^n, z_2^m),\ n, m \in \{1, 2, ...\}$

Näistä $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ on yhdesti yhtenäinen.

3. a) Annulus $A = \{(x,y,z) \mid 1 \le x^2 + y^2 \le 2,\ z = 0\}$ on X:n vahva deformaatioretrakti, homotopiana $H\colon X \times I \to X$, $H(x,y,z,t) = (x, y, (1-t)z)$ eli janahomotopia. Ympyrä $B = \{(x,y,z) \mid x^2 + y^2 = 1,\ z = 0\} \approx S^1$ taas on A:n vahva deformaatioretrakti, homotopiana säteittäinen janahomotopia. Siis $X \simeq S^1$ eli $\pi(X) \cong \mathbb{Z}$.

b) Aliavaruus $A = \bar{B}^2 \times \{0\}$ on X:n vahva deformaatioretrakti, joten $X \simeq A \approx \bar{B}^2$, joka on kutistuva. Siis $\pi(X) = 0$.

c) Merkitään $A = S((1/2, 0, 0), 1/2),\ B = ((-1/2, 0, 0), 1/2) \subset \mathbb{R}^3$, jolloin voidaan ajatella $X = A \cup B$. Lisäksi $A \cap B = \{(0,0,0)\}$, merkitään $x_0 = (0,0,0)$, $a = (1,0,0) \in A$, $b = (-1,0,0) \in B$.

Jokainen A:n piste voidaan yhdistää polulla pisteeseen x_0, samoin jokainen B:n piste. Tästä seuraa, että X on polkuyhtenäinen.

Koska $\{x_0\}$ on joukon $B \setminus \{b\}$ vahva deformaatioretrakti ($B \setminus \{b\} \approx \mathbb{R}^2$), on A joukon $X \setminus \{b\}$ vahva deformaatioretrakti; merkitään $X_1 = X \setminus \{b\}$. Siis $X_1 \simeq A$, joka on yhdesti yhtenäinen, joten X_1 on yhdesti yhtenäinen.

Vastaavasti joukko $X_2 = X \setminus \{a\}$ on yhdesti yhtenäinen.

Joukko $A \setminus \{a\}$ on polkuyhtenäinen, jokainen sen piste voidaan yhdistää polulla pisteeseen x_0. Samoin voidaan jokainen joukon $B \setminus \{b\}$ piste. Tästä seuraa, että $X_1 \cap X_2 = X \setminus \{a, b\}$ on polkuyhtenäinen.

Seifertin-van Kampenin lauseesta (1.4) seuraa nyt, että X on yhdesti yhtenäinen, eli $\pi(X) = 0$.

4. a) Merkitään $f\colon H \to g^{-1}Hg = \{g^{-1}hg \mid h \in H\}$, $h \mapsto g^{-1}hg$. Selvästi f on surjektio. Injektiivisyys: jos $f(h_1) = f(h_2)$ eli $g^{-1}h_1g = g^{-1}h_2g$, niin kertomalla vasemmalta alkiolla g ja oikealta alkiolla g^{-1} saadaan $h_1 = h_2$.

b) Olkoon $f\colon \mathbb{Z} \to H$ funktio

$$n \mapsto \begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Selvästi f on bijektio. Koska lisäksi

$$f(n) \cdot f(m) = \begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & m \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & n+m \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = f(n+m),$$

on f homomorfismi, eli isomorfismi $(\mathbb{Z}, +) \to (H, \cdot)$.
Koska

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2n \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2n \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

nähdään, että

$$g^{-1} H g = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 2n \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \,\middle|\, n \in \mathbb{Z} \right\} \subsetneq H.$$

5. Lauseen 2.9 nojalla nosto on olemassa jos ja vain jos

$$(f_m)_* \pi(S^1, 1) \subset (f_n)_* \pi(S^1, 1).$$

Tekemällä samastus $\pi(S^1, 1) = \mathbb{Z}$, tämä ehto on voimassa jos ja vain jos $m\mathbb{Z} \subset n\mathbb{Z}$ eli $n|m$. Siis nosto on olemassa jos ja vain jos $n|m$.
Jos $m = 4, n = 2$, niin nosto on siis olemassa; funktioksi $\tilde{f}_m$ kelpaa $\tilde{f}_m(z) = z^2$. Jos $m = 3, n = 2$, nostoa ei ole olemassa.

6. a)

$$\begin{tikzcd} & (X_2, x_2) \arrow[d, "p_2"] \\ (X_1, x_1) \arrow[ur, dotted, "f"] \arrow[r, "p_1"'] & (Y, p_1(x_1)) \end{tikzcd}$$

On olemassa homomorfismi $f\colon (X_1, p_1) \to (X_2, p_2)$, jolle $f(x_1) = x_2$
$\Leftrightarrow$ on olemassa jatkuva funktio $f\colon (X_1, x_1) \to (X_2, x_2)$, jolle $p_2 \circ f = p_1$
$\Leftrightarrow$ funktiolla p_1 on nosto $(X_1, x_1) \to (X_2, x_2)$
$\Leftrightarrow$ $(p_1)_* \pi(X_1, x_1) \subset (p_2)_* \pi(X_2, x_2)$.
Viimeisessä välivaiheessa käytettiin Lausetta 2.9.

b) "$\Rightarrow$": Soveltamalla a)-kohdan "$\Rightarrow$"-suuntaa homomorfismeihin f ja f^{-1} saadaan $(p_1)_* \pi(X_1, x_1) \subset (p_2)_* \pi(X_2, x_2)$ ja $(p_2)_* \pi(X_2, x_2) \subset (p_1)_* \pi(X_1, x_1)$, mistä väite seuraa.

"$\Leftarrow$": Soveltamalla a)-kohdan "$\Leftarrow$"-suuntaa saadaan homomorfismi $f_1\colon (X_1, p_1) \to (X_2, p_2)$, jolle $f_1(x_1) = x_2$ ja homomorfismi $f_2\colon (X_2, p_2) \to (X_1, p_1)$, jolle $f_2(x_2) = x_1$. Kysymys: Onko $f_2 \circ f_1 = \mathrm{id}_{X_1}$? Nyt

$$p_1 \circ f_2 \circ f_1 = p_2 \circ f_1 = p_1 \quad \text{ja} \quad p_1 \circ \mathrm{id}_{X_1} = p_1$$

(käytettiin, että f_1 ja f_2 ovat homomorfismeja). Lisäksi $(f_2 \circ f_1)(x_1) = f_2(x_2) = x_1$ ja $\mathrm{id}_{X_1}(x_1) = x_1$. Korollaarin 2.8 oletukset ovat siis voimassa, joten $f_2 \circ f_1 = \mathrm{id}_{X_1}$. Vastaavasti $f_1 \circ f_2 = \mathrm{id}_{X_2}$. Siis f_1 on isomorfismi $(X_1, p_1) \to (X_2, p_2)$.