Homotopy theory
Exercise 5 (8.10.2015)

1. a) Prove that the map (lectures, p. 4–5, between Remark 1.5 and Proposition 1.6)

$$\pi|\colon B^n \to S^n \setminus \{e_{n+1}\}$$

is a homeomorphism.
b) See the proof of Proposition 1.6 (lectures, p. 5). Prove that

$$U_1 \cap U_2 \approx S^{n-1} \times (-1, 1).$$

2. Consider the covering maps $p\colon (X, x_0) \to (S^1, 1)$, where

$$(X, x_0) = (\mathbb{R}, 0),\ p(x) = e^{2\pi i x},$$

or

$$(X, x_0) = (S^1, 1),\ p(z) = z^n,\ n = 1, 2, ...$$

Calculate $p_*\pi(X, x_0)$ in these cases.

3. Väisälä, p. 167, Exercise 23:11.
Let X be the union of an increasing sequence of open simply connected subsets $U_1 \subset U_2 \subset ....$ Prove that X is simply connected.

4. a) Suppose that G is a group, H is a subgroup of G and $g \in G$. Prove that $g^{-1}Hg$ is a subgroup of G.
b) Consider the symmetry group of the square D_4, see Metsänkylä–Näätänen: Algebra, p. 92–98 (copies can be found from our course webpage under the title "Course material").
Let $K = \{I, H\}$, which is a subgroup of D_4. Determine the conjugate subgroups $g^{-1}Kg$ for every $g \in D_4$. What is $[K]$ in this example?

5. a) Prove: A space X is locally path connected if and only if each path component of each open subset of X is open.

b) Let X be the comb space (Väisälä, Exercise 21:8). Give an example of an open subset U of X, and a path component of U which is not open.

6. a) Prove that the system of equations

$$\begin{cases} x\cos y = & x^2 + y^2 - 1 \\ y\cos x = & \sin(2\pi(x^3 + y^3)) \end{cases}$$

has a solution in the disc $\bar{B}^2$. [Hint: Väisälä, Proposition 24.14.]
b) Same question for the system

$$\begin{cases} x\cos y = & x^2 + y^2 - 1 \\ y\cos x = & \tan(2\pi(x^3 + y^3)). \end{cases}$$

Homotopiateoria
Harjoitus 5 (8.10.2015)

1. a) Osoita, että kuvaus (luennot, s. 4–5)

$$\pi|\colon B^n \to S^n \setminus \{e_{n+1}\}$$

on homeomorfismi.

b) Kts. Lauseen 1.6 todistus (luennot, s. 5). Osoita, että

$$U_1 \cap U_2 \approx S^{n-1} \times (-1, 1).$$

2. Tarkastellaan esimerkeissä esiintyneitä peitekuvauksia $p\colon (X, x_0) \to (S^1, 1)$, missä

$$(X, x_0) = (\mathbb{R}, 0),\ p(x) = e^{2\pi i x},$$

tai

$$(X, x_0) = (S^1, 1),\ p(z) = z^n,\ n = 1, 2, ...$$

Laske näissä tapauksissa $p_*\pi(X, x_0)$.

3. Väisälä, s. 167, tehtävä 23:11

4. a) Olkoon G ryhmä, H G:n aliryhmä ja $g \in G$. Osoita, että $g^{-1}Hg$ on G:n aliryhmä.

b) Tarkastellaan neliön symmetriaryhmää D_4, kts. moniste Metsänkylä-Näätänen: Algebra, s. 92–98 (kopiot löytyvät kurssin kotisivulta kohdasta ”Course material”).
Olkoon $K = \{I, H\}$, joka on D_4:n aliryhmä. Laske konjugaatit $g^{-1}Kg$ jokaisella $g \in D_4$. Mikä on $[K]$?

5. a) Todista Lause 2.6 (luennot, s. 9)

b) Olkoon X kampa-avaruus (Väisälä, harj.tehtävä 21:8). Anna esimerkki X:n avoimesta osajoukosta U, ja U:n polkukomponentista, joka ei ole avoin.

6. a) Osoita, että yhtälöryhmällä

$$\begin{cases} x\cos y = & x^2 + y^2 - 1 \\ y\cos x = & \sin(2\pi(x^3 + y^3)) \end{cases}$$

on ratkaisu kiekossa $\bar{B}^2$. Vihje: Lause V:24.14.
b) Sama kysymys yhtälöryhmälle

$$\begin{cases} x\cos y = & x^2 + y^2 - 1 \\ y\cos x = & \tan(2\pi(x^3 + y^3)). \end{cases}$$