Homotopiateoria
Harjoitus 5. Ratkaisuja.

1. a) Kuvaus

$\varphi\colon (\bar{B}^n, S^{n-1}) \to (S^n, e_{n+1}),\ \ \pi(y) = (2\sqrt{1-|y|^2}\cdot y, 2|y|^2-1) \in \mathbb{R}^n\times\mathbb{R} \approx \mathbb{R}^{n+1}.$

- $$\begin{aligned}|\pi(y)|^2 &= (4(1-|y|^2)|y|^2) + (4|y|^4 - 4|y|^2 + 1)\\ &= 4|y|^2 - 4|y|^4 + 4|y|^4 - 4|y|^2 + 1 = 1\end{aligned}$$
  eli $\pi(y) \in S^n$.
- Jos $|y| = 1$, on $\pi(y) = (2\cdot 0\cdot y, 2\cdot 1 - 1) = (\bar{0}, 1)$ eli $\pi(S^{n-1}) = e_{n+1}$.
- Jos $\pi(y) = (\bar{0}, 1)$, on $2|y|^2 - 1 = 1$ eli $|y|^2 = 1$, joten $y \in S^{n-1}$. Siis $\pi^{-1}(e_{n+1}) = S^{n-1}$.
- Edellisestä seuraa, että saadaan $\pi|\colon B^n \to S^n \setminus \{e_{n+1}\}$.
- π on jatkuva, joten $\pi|$ on jatkuva.

Määritellään sitten

$$\rho\colon S^n \setminus \{e_{n+1}\} \to B^n,\quad \rho(z,t) = \frac{z}{\sqrt{2(1-t)}},$$

missä $(z,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$.

- Huom. tässä $(z,t) \in S^n \setminus \{e_{n+1}\}$, joten $|z|^2 + t^2 = 1$ ja $t \neq 1$.
- Nimittäjä $\neq 0$, koska $t \neq 1$.
- $$\left|\frac{z}{\sqrt{2(1-t)}}\right|^2 = \frac{|z|^2}{2(1-t)} = \frac{1-t^2}{2(1-t)} = \frac{1+t}{2} < \frac{1+1}{2} = 1,$$
  joten $\rho(z,t) \in B^n$.
- ρ on jatkuva.

$\rho \circ \pi = \mathrm{id}$:

$$\rho(\pi(y)) = \frac{2\sqrt{1-|y|^2}\cdot y}{\sqrt{2(1-2|y|^2+1)}} = \frac{2\sqrt{1-|y|^2}}{\sqrt{4-4|y|^2}}\cdot y = y.$$

$\pi \circ \rho = \mathrm{id}$:

$$\pi(\rho(z,t)) = \pi\left(\frac{z}{\sqrt{2(1-t)}}\right) = \left(2\sqrt{1-\frac{|z|^2}{2(1-t)}}\cdot\frac{z}{\sqrt{2(1-t)}}, 2\cdot\frac{1+t}{2}-1\right)$$

$$= \left(2\sqrt{1-\frac{1+t}{2}}\frac{z}{\sqrt{2(1-t)}}, t\right) = \left(2\sqrt{\frac{1-t}{2}}\frac{z}{\sqrt{2(1-t)}}, t\right) = (z,t).$$

Kolmannessa välivaiheessa käytettiin tietoa $|z|^2 = 1-t^2$.
Siis $\pi|$ on homeomorfismi käänteiskuvauksenaan ρ.

b) Määritellään

$$\varphi\colon S^n \setminus \{e_{n+1}, -e_{n+1}\} \to S^{n-1}\times(-1,1)$$
$$(z,t)\mapsto\left(\frac{z}{|z|}, t\right),\quad z\in\mathbb{R}^n, t\in\mathbb{R}.$$

- Koska $e_{n+1}, -e_{n+1}$ eivät ole määrittelyjoukossa, niin $z \neq \bar{0}$, joten $z/|z|$ on määritelty ja $z/|z| \in S^{n-1}$. Vastaavasti $t \notin \{-1,+1\}$, joten $t \in (-1,1)$.
- Jatkuvuus ok.

Määritellään sitten

$$\psi\colon S^{n-1}\times(-1,1) \to S^n \setminus \{e_{n+1}, -e_{n+1}\}$$
$$(z,t)\mapsto(\sqrt{1-t^2}\cdot z, t),\quad z\in\mathbb{R}^n, t\in\mathbb{R}.$$

- Koska $-1 < t < 1$, on $\sqrt{1-t^2}\in\mathbb{R}$
- Koska $|z| = 1$, on $|(\sqrt{1-t^2}\cdot z, t)| = \sqrt{(1-t^2)|z|^2+t^2} = 1$, eli kuvapiste on pallolla S^n.
- Koska $t\notin\{-1,+1\}$, on kuvapiste joukossa $S^n\setminus\{e_{n+1}, -e_{n+1}\}$.

- Jatkuvuus ok.

$\psi \circ \varphi = \mathrm{id}$: Olkoon $(z,t) \in S^n \setminus \{e_{n+1}, -e_{n+1}\}$, jolloin

$$\psi \circ \varphi(z,t) = \psi(z/|z|, t) = (\sqrt{1-t^2} \cdot z/|z|, t) = (z,t).$$

Viimeisessä välivaiheessa käytettiin tietoa $(z,t) \in S^n$, josta seuraa $|z|^2 = 1 - t^2$.
$\varphi \circ \psi = \mathrm{id}$: Olkoon $(z,t) \in S^{n-1} \times (-1,1)$, jolloin

$$\varphi \circ \psi(z,t) = \varphi(\sqrt{1-t^2} \cdot z, t) = \left(\frac{\sqrt{1-t^2} \cdot z}{|\sqrt{1-t^2} \cdot z|}, t \right) = (z/|z|, t) = (z,t).$$

Viimeisessä välivaiheessa käytettiin tietoa $z \in S^{n-1}$.

2. Samastetaan seuraavassa $\pi(S^1, 1)$ ja $(\mathbb{Z}, +)$ isomorfismin $\bar{\gamma}^n \mapsto n$ välityksellä. Tapauksessa $X = \mathbb{R}$ on $\pi(X, x_0) = 0$, joten myös $p_*\pi(X, x_0) = \{0\} \subset \mathbb{Z}$. Olkoon nyt $(X, x_0) = (S^1, 1)$, $p(z) = z^n$, $n \in \{1, 2, ...\}$. Ryhmän $\pi(X, x_0)$ virittää luokka $\bar{\gamma}$, $\gamma \colon I \to S^1$, $\gamma(s) = e^{2\pi i s}$. Nyt $p_*(\bar{\gamma}) = \overline{p \circ \gamma}$ ja $(p \circ \gamma)(s) = (e^{2\pi i s})^n = e^{2\pi n i s}$, joten

$$p_*(\bar{\gamma}) = \bar{\gamma}^n,$$

jota isomorfismissa vastaa $n \in \mathbb{Z}$. Koska alkio $\bar{\gamma}$ virittää ryhmän $\pi(X, x_0)$, niin $p_*(\bar{\gamma})$ virittää ryhmän $p_*\pi(X, x_0)$, joten

$$p_*\pi(X, x_0) = n\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}.$$

3. Valitaan kantapiste $x_0 \in U_1$.
Osoitetaan ensin, että X on polkuyhtenäinen. Olkoot $x, y \in X$, valitaan $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ siten, että $x \in U_{n_1}, y \in U_{n_2}$. Merkitään $n = \max\{n_1, n_2\}$, jolloin $x, y \in U_n$ (koska $U_1 \subset U_2 \subset ...$). Koska U_n on oletuksen nojalla polkuyhtenäinen, x ja y voidaan yhdistää polulla U_n:ssä, eli myös X:ssä. Siis X on polkuyhtenäinen.
Olkoon sitten $\alpha \in \Omega(X, x_0)$. Osoitetaan, että α on nollahomotooppinen. Koska kuvajoukko $\alpha(I)$ on kompakti ja avoimet joukot U_n peittävät X:n, niin on olemassa äärellinen osapeite $U_{n_1}, ..., U_{n_k}$ joukolle $\alpha(I)$. Jos merkitään $n_0 = \max\{n_1, ..., n_k\}$, on siis $\alpha(I) \subset U_{n_0}$ (koska $U_1 \subset U_2 \subset ...$). Koska U_{n_0} on yhdesti yhtenäinen, on α nollahomotooppinen U_{n_0}:ssa, siis myös X:ssä.

4. a) Riittää osoittaa, että $g^{-1}Hg \neq \emptyset$ ja $ab^{-1} \in g^{-1}Hg$ kaikilla $a, b \in g^{-1}Hg$. Koska $e \in H$, on $g^{-1}eg = e \in g^{-1}Hg$; siis $g^{-1}Hg \neq \emptyset$.
Olkoot nyt $a = g^{-1}h_1g$ ja $b = g^{-1}h_2g$, missä $h_1, h_2 \in H$. Tällöin $b^{-1} = g^{-1}h_2^{-1}g$ ja

$$ab^{-1} = g^{-1}h_1gg^{-1}h_2^{-1}g = g^{-1}h_1h_2^{-1}g \in g^{-1}Hg,$$

viimeisessä välivaiheessa käytettiin oletusta, että H on aliryhmä, jolloin tiedetään, että $h_1h_2^{-1} \in H$.

b) Lasketaan: selvästi $g^{-1}Ig = I$ jokaisella $g \in D_4$.

- $I^{-1}HI = H$, joten $I^{-1}KI = \{I, H\}$
- $R_{90}^{-1}HR_{90} = R_{270}HR_{90} = D'R_{90} = V$, joten $R_{90}^{-1}KR_{90} = \{I, V\}$
- $R_{180}^{-1}HR_{180} = R_{180}HR_{180} = VR_{180} = H$, joten $R_{180}^{-1}KR_{180} = \{I, H\}$
- $R_{270}^{-1}HR_{270} = R_{90}HR_{270} = DR_{270} = V$, joten $R_{270}^{-1}KR_{270} = \{I, V\}$
- $H^{-1}HH = H$, joten $H^{-1}KH = \{I, H\}$
- $V^{-1}HV = VHV = R_{180}V = H$, joten $V^{-1}KV = \{I, H\}$
- $D^{-1}HD = DHD = R_{90}D = V$, joten $D^{-1}KD = \{I, V\}$
- $(D')^{-1}HD' = D'HD' = R_{270}D' = V$, joten $(D')^{-1}KD' = \{I, V\}$.

Siis $[K] = \{\{I, H\}, \{I, V\}\}$.

5. "$\Rightarrow$": Olkoon $U \Subset X$, V U:n polkukomponentti ja $x \in V$. Koska X on lokaalisti polkuyhtenäinen, on olemassa pisteen x polkuyhtenäinen ympäristö $W \subset U$. Koska V on laajin x:n sisältävä U:n polkuyhtenäinen osajoukko, on välttämättä $W \subset V$. Siis V on avoin.
"$\Leftarrow$": Olkoon $x \in X$ ja U x:n ympäristö. Lauseen ehdon nojalla U:n x-polkukomponentti $P(x, U)$ on avoin X:ssä. Nyt $P(x, U)$ on x:n polkuyhtenäinen ympäristö, joka $\subset U$. Siis X on lokaalisti polkuyhtenäinen.

6. a) Tarkastellaan funktiota

$$f \colon \bar{B}^2 \to \mathbb{R}^2$$

$$f(x, y) = (x \cos y - x^2 - y^2 + 1, y \cos x - \sin(2\pi(x^3 + y^3))),$$

joka selvästi on jatkuva. Ympyrällä S^1 on $x^2 + y^2 = 1$, jolloin

$$f(x, y) = (x \cos y, y \cos x - \sin(2\pi(x^3 + y^3))).$$

Koska $\cos(-y) = cos(y)$, on $-x \cos(-y) = -x \cos y$, ja vastaavasti $-y \cos(-x) = -y \cos x$. Lisäksi $(-x)^3 + (-y)^3 = -(x^3 + y^3)$, ja $\tan(-z) = \tan z$. Siis saadaan, että ympyrällä S^1 pätee $f(-x, -y) = -f(x, y)$, joten Lauseen V:24.14 nojalla funktiolla f on nollakohta. Tämä nollakohta antaa ratkaisun alkuperäiselle yhtälöparille.

b) Tarkastellaan funktiota

$$g \colon \bar{B}^2 \to \mathbb{R}^2$$

$$g(x, y) = (x \cos y - x^2 - y^2 + 1, \tan^{-1}(y \cos x) - 2\pi(x^3 + y^3)),$$

joka on määritelty ja jatkuva kiekossa $\bar{B}^2$. Tässä $\tan^{-1} \colon \mathbb{R} \to (-\pi/2, \pi/2)$. Vastaavasti kuten yllä tälle funktiolle löydetään nollakohta $(x_0, y_0) \in \bar{B}^2$, eli

$$\begin{cases} x_0 \cos y_0 & = x_0^2 + y_0^2 - 1 \\ \tan^{-1}(y_0 \cos x_0) & = 2\pi(x_0^3 + y_0^3) \end{cases}$$

Ottamalla jälkimmäisessä yhtälössä puolittain funktio tan nähdään, että (x_0, y_0) on ratkaisu alkuperäiselle yhtälöparille.

Toinen ratkaisu (Eske Ewert): Tarkastellaan funktiota

$$g \colon \bar{B}^2 \to \mathbb{R}^2$$

$$g(x, y) = (x \cos y - x^2 - y^2 + 1, y \cos x \cdot \cos(2\pi(x^3 + y^3)) - \sin(2\pi(x^3 + y^3))),$$

joka on määritelty ja jatkuva kiekossa $\bar{B}^2$. Vastaavasti kuten yllä tälle funktiolle löydetään nollakohta $(x_0, y_0) \in \bar{B}^2$, eli

$$\begin{cases} x_0 \cos y_0 & = x_0^2 + y_0^2 - 1 \\ y_0 \cos x_0 \cdot \cos(2\pi(x_0^3 + y_0^3)) & = \sin(2\pi(x_0^3 + y_0^3)). \end{cases}$$

Jakamalla jälkimmäinen yhtälö luvulla $\cos(2\pi(x_0^3 + y_0^3))$ nähdään, että (x_0, y_0) on ratkaisu alkuperäiselle yhtälöparille. Huomataan, että $\cos(2\pi(x_0^3 + y_0^3)) \neq 0$, koska muutoin olisi toisen yhtälön nojalla myös $\sin(2\pi(x_0^3 + y_0^3)) = 0$, mikä ei ole mahdollista, koska funktioilla sin ja cos ei ole yhteisiä nollakohtia.