Homotopiateoria
Harjoitus 4. Ratkaisuja.

1. a) Koska $H(x,1) \in A$ jokaisella $x \in X$, voidaan määritellä kuvaus $r\colon X \to A$ kaavalla $r(x) = H(x,1)$. Se on jatkuva, ja lisäksi retraktio, koska $H(a,1) = a$ jokaisella $a \in A$.

b) Jos merkitään $i\colon A \to X$ on inkluusio, ja r on kuten a)-kohdassa, niin $r \circ i = \mathrm{id}_A$ ja $H\colon \mathrm{id}_X \simeq i \circ r$. Tämä todistaa väitteen.

c) Määritellään

$$H\colon \mathbb{R}^n \setminus \{\bar{0}\} \times I \to \mathbb{R}^n \setminus \{\bar{0}\}$$
$$H(x,t) = (1-t)x + t\frac{x}{|x|}.$$

Tarkistetaan ensin, että maalijoukoksi voidaan ottaa $\mathbb{R}^n \setminus \{\bar{0}\}$, eli, että k.o. lauseke ei saa arvoa $\bar{0}$. Jos olisi $(1-t)x + t\frac{x}{|x|} = \bar{0}$, niin saataisiin $(1-t)x = -\frac{t}{|x|}x$. Koska $1-t \geq 0$, $-\frac{t}{|x|} \leq 0$, ja $x \neq \bar{0}$, on välttämättä $1-t = 0$ ja $-\frac{t}{|x|} = 0$. Näistä saadaan $t = 1$ ja $t = 0$, mikä on ristiriita.
Nyt H on vaadittu homotopia, koska

$$H(x,0) = x \quad \text{jokaisella } x \in \mathbb{R}^n \setminus \{\bar{0}\}$$
$$H(x,1) = \frac{x}{|x|} \in S^{n-1} \quad \text{jokaisella } x \in \mathbb{R}^n \setminus \{\bar{0}\}$$

ja

$$H(a,t) = (1-t)a + t\frac{a}{|a|} = a - ta + ta = a \quad \text{jokaisella } a \in S^{n-1}.$$

d) Olkoon X kampa-avaruus (kts. V:21:8, Harj. 2/Teht. 6) ja $A = \{(0,1)\} \subset X$. Olkoot f_1, f_2 kuten tehtävän ratkaisussa ja f_3 vakiofunktio $f_3 \equiv (0,1)$. Vakiofunktiot f_2 ja f_3 ovat homotooppiset, koska X on polkuyhtenäinen. Nyt homotopia $\mathrm{id}_X \simeq f_1 \simeq f_2 \simeq f_3$ osoittaa, että A on X:n deformaatioretrakti. Jos A olisi X:n vahva deformaatioretrakti, olisi olemassa homotopia $\mathrm{id}_X \simeq f_3$ rel $(0,1)$, mutta tällaista ei ole Harj. 2/Teht. 6 nojalla.

e) Esim. $X = \{0,1\}$, $A = \{0\}$. Selvästi vakiokuvaus on retraktio $X \to A$, mutta deformaatioretraktio määrittelisi polun avaruudessa X pisteestä 1 pisteeseen 0, mutta tällaista ei ole olemassa. Siis A ei ole X:n deformaatioretrakti.

2. Olkoon $h\colon X \times I \to S^1$ homotopia $f \simeq g$. Merkitään $w_0 = f(x_0) = g(x_0)$. Määritellään $h'\colon X \times I \to S^1$ kaavalla

$$h'(x,t) = \frac{w_0}{h(x_0,t)} h(x,t),$$

missä laskutoimitukset ovat kompleksilukujen kerto- ja jakolasku. Nyt

$$h'(x,0) = \frac{w_0}{h(x_0,0)} h(x,0) = \frac{w_0}{w_0} f(x) = f(x) \text{ jokaisella } x \in X,$$

$$h'(x,1) = \frac{w_0}{h(x_0,1)} h(x,1) = \frac{w_0}{w_0} g(x) = g(x) \text{ jokaisella } x \in X$$

ja

$$h'(x_0,t) = \frac{w_0}{h(x_0,t)} h(x_0,t) = w_0 \text{ jokaisella } t \in I.$$

Siis $h'\colon f \simeq g$ rel x_0.

3. Antiteesi: on olemassa homeomorfismi $\mathbb{R}^n \approx \mathbb{R}^2$ ($n \geq 3$). Tällöin f:n rajoittuma on homeomorfismi $\mathbb{R}^n \setminus \{\bar{0}\} \approx \mathbb{R}^2 \setminus \{f(\bar{0})\}$. Harjoitustehtävän 1 c)- ja b)-kohtien nojalla $\mathbb{R}^n \setminus \{\bar{0}\} \simeq S^{n-1}$. Lisäksi $\mathbb{R}^2 \setminus \{f(\bar{0})\} \approx \mathbb{R}^2 \setminus \{\bar{0}\} \simeq S^1$. Siis $S^{n-1} \simeq S^1$, josta seuraa, että $\pi(S^{n-1}) \cong \pi(S^1)$. Tämä on ristiriita, koska luennolla todistetun nojalla $\pi(S^{n-1}) = 0$ (koska tässä $n \geq 3$) ja $\pi(S^1) \cong \mathbb{Z}$.

4. Osoitetaan ensin, että ei ole olemassa homeomorfismia $f\colon \bar{B}^2 \to \bar{B}^2$, jolle $f(0,1) \in B^2$. Antiteesi: f on tällainen homeomorfismi. Tällöin myös f:n rajoittuma $\bar{B}^2 \setminus \{(0,1)\} \to \bar{B}^2 \setminus \{f(0,1)\}$ on homeomorfismi. Nyt $\bar{B}^2 \setminus \{(0,1)\} = \bar{B}^2 \cap \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y < 1\}$ on kahden konveksin joukon leikkauksena konveksi, erityisesti se on yhdesti yhtenäinen. Toisaalta $\bar{B}^2 \setminus \{f(0,1)\} \approx \bar{B}^2 \setminus \{\bar{0}\} \simeq S^1$, joka ei ole yhdesti yhtenäinen; ensimmäinen homeomorfismi saadaan harjoitustehtävästä V:3:12, jälkimmäinen homotopiaekvivalenssi saadaan deformaatioretraktiosta kuten tehtävässä 1. Päädyttiin siis ristiriitaan, joten alkuperäinen väite pätee.
Pidetään tunnettuna, että kierrot $\bar{B}^2 \to \bar{B}^2$ ovat homeomorfismeja, jolloin äskeisestä seuraa, että ei ole olemassa homeomorfismia $f\colon \bar{B}^2 \to \bar{B}^2$ ja pistettä $x \in S^1$, jolle $f(x) \in B^2$ (jos olisi, niin sopiva kierto kuvaisi pisteen $(0,1)$ pisteelle x, ja saataisiin homeomorfismi, jota yllä olevan nojalla ei ole olemassa).
Siis homeomorfismille $f\colon \bar{B}^2 \to \bar{B}^2$ pätee välttämättä $fS^1 \subset S^1$. Tämä pätee siis myös f:n käänteiskuvaukselle, eli $f^{-1}(S^1) \subset S^1$; näistä saadaan $fS^1 = S^1$. Tästä seuraa suoraan, että myös $fB^2 = B^2$.

Avaruus X on homogeeninen, jos jokaisella $a, b \in X$ on olemassa homeomorfismi $f\colon X \to X$, jolle $f(a) = b$. Edellisen nojalla ei ole olemassa homeomorfismia $f\colon \bar{B}^2 \to \bar{B}^2$, jolle $f(0,1) = (0,0)$, joten $\bar{B}^2$ ei ole homogeeninen avaruus.

5. a) Antiteesi: on olemassa upotus $f\colon S^1 \to \mathbb{R}$. Koska S^1 on yhtenäinen, niin $f(S^1)$ on yhtenäinen, siis Lauseen 14.15 (Väisälä: Topologia I) nojalla fS^1 on väli. Siis fS^1 on konveksi, joten se on yhdesti yhtenäinen. Koska f on upotus, on $fS^1 \approx S^1$, mikä on ristiriita, koska S^1 ei ole yhdesti yhtenäinen. Huom. havainnon "fS^1 on väli" jälkeen olisi voitu jatkaa myös seuraavasti: poistetaan väliltä fS^1 yksi sisäpiste a, jolloin saataisiin homeomorfismi $S^1 \setminus \{f^{-1}(a)\} \to f(S^1)\setminus\{a\}$, mikä on ristiriita, koska ensin mainittu on yhtenäinen, kun taas jälkimmäinen on epäyhtenäinen.

b) Borsukin–Ulamin lauseen nojalla: jos $f\colon S^2 \to \mathbb{R}^2$ on jatkuva, niin $f(-x) = f(x)$ jollakin $x \in S^2$. Siis ei ole olemassa jatkuvaa injektiota $S^2 \to \mathbb{R}^2$, joten ei ole olemassa upotusta $S^2 \to \mathbb{R}^2$.

6. Oletetaan, että (X, d) on metrinen avaruus, $a, b \in X$. Merkitään joukon $P = \Omega(X, a, b)$ sup-metriikkaa symbolilla $\bar{d}$, $\bar{d}(\alpha, \beta) = \max_{s \in I} d(\alpha(s), \beta(s))$.

"$\Rightarrow$": Oletetaan, että $\alpha, \beta \in P$ ovat polkuhomotooppiset, $h\colon \alpha \sim \beta$. Määritellään polku

$$\bar{h}\colon I \to P,$$
$$t \mapsto \bar{h}(t),$$

missä $\bar{h}(t)$ on X:n polku, jolle $\bar{h}(t)(s) = h(s,t)$.

Nyt $\bar{h}(0)(s) = h(s,0) = \alpha(s)$ eli $\bar{h}(0) = \alpha$ ja $\bar{h}(1)(s) = h(s,1) = \beta(s)$ eli $\bar{h}(1) = \beta$.

On siis osoitettava, että $\bar{h}\colon I \to P$ on jatkuva: Olkoon $t_0 \in I$ ja $\epsilon > 0$. Tutkitaan funktiota

$$\phi\colon I^2 \to \mathbb{R}$$
$$\phi(s,t) = d(h(s,t_0), h(s,t))$$

ja olkoon $U = \phi^{-1}([0, \epsilon[)$. Nyt $I \times \{t_0\} \subset U$, koska $\phi(s, t_0) = 0$ jokaisella $s \in I$. Tästä seuraa, että U on joukon $I \times \{t_0\}$ ympäristö I^2:ssa, joten Lauseen V:15.24 nojalla on olemassa t_0:n ympäristö V I:ssä siten, että $I \times V \subset U$. Osoitetaan nyt, että $\bar{d}(\bar{h}(t), \bar{h}(t_0)) < \epsilon$ jokaisella $t \in V$, mistä jatkuvuus seuraa: Olkoon $t \in V$. Nyt

$$\begin{aligned}\bar d(\bar h(t),\bar h(t_0)) &= \max_{s\in I} d(\bar h(t)(s),\bar h(t_0)(s))\\ &= \max_{s\in I} d(h(s,t),h(s,t_0)) = \max_{s\in I}\phi(s,t) < \epsilon,\end{aligned}$$

koska $(s,t)\in I\times V\subset U$.

"$\Leftarrow$": Olkoon $\bar h\colon I\to P$ polku siten, että $\bar h(0)=\alpha$, $\bar h(1)=\beta$. Määritellään

$$h\colon I\times I\to X$$

kaavalla

$$h(s,t)=\bar h(t)(s).$$

Selvästi $h(s,0)=\alpha(s)$, $h(s,1)=\beta(s)$, $h(0,t)=\bar h(t)(0)=a$ (koska $\bar h(t)\in P$) ja $h(1,t)=\bar h(t)(1)=b$ (koska $\bar h(t)\in P$). Riittää siis osoittaa funktion h jatkuvuus. Olkoon $(s_0,t_0)\in I\times I$, $\epsilon>0$. Koska $\bar h$ on jatkuva, on olemassa t_0:n ympäristö U siten, että

$$\bar d(\bar h(t),\bar h(t_0)) < \frac{\epsilon}{2} \quad \text{jokaisella } t\in U$$

eli

$$\max_{s\in I} d(h(s,t),h(s,t_0)) < \frac{\epsilon}{2} \quad \text{jokaisella } t\in U. \tag{1}$$

Koska $\bar h(t_0)\colon I\to X$ on jatkuva, on olemassa pisteen s_0 ympäristö V siten, että

$$d(\bar h(t_0)(s),\bar h(t_0)(s_0)) < \frac{\epsilon}{2} \quad \text{jokaisella } s\in V$$

eli

$$d(h(s,t_0),h(s_0,t_0)) < \frac{\epsilon}{2} \quad \text{jokaisella } s\in V. \tag{2}$$

Jos nyt $(s,t)\in V\times U$, on

$$d(h(s,t),h(s_0,t_0)) \le d(h(s,t),h(s,t_0)) + d(h(s,t_0),h(s_0,t_0)) < \frac{\epsilon}{2}+\frac{\epsilon}{2}=\epsilon,$$

toiseksi viimeinen välivaihe seuraa epäyhtälöistä (1) ja (2).