Homotopiateoria
Harjoitus 3. Ratkaisuja.

1. Olkoon $\alpha \in \Omega(X, x_0)$. On osoitettava, että

$$g_*(\bar{\alpha}) = \overline{\sigma^{\leftarrow}} f_*(\bar{\alpha}) \bar{\sigma}$$

eli

$$\overline{\epsilon_{y_1}} = g_*(\bar{\alpha})^{-1} \overline{\sigma^{\leftarrow}} f_*(\bar{\alpha}) \bar{\sigma}$$

eli

$$\overline{g \circ \alpha^{\leftarrow}} \cdot \overline{\sigma^{\leftarrow}} \cdot \overline{f \circ \alpha} \cdot \bar{\sigma} = \overline{\epsilon_{y_1}}. \tag{1}$$

Olkoon $z_0 = (1,1) \in I^2$ ja $\omega \in \Omega(I^2, z_0)$ neljän janapolun kompositio, joka kiertää neliön reunan vastapäivään.
Määritellään $F \colon I^2 \to Y$ kaavalla $F(s,t) = h(\alpha(s), t)$, missä $h \colon X \times I \to Y$ on homotopia $f \simeq g$. Nyt

$$F(s,1) = h(\alpha(s), 1) = g(\alpha(s)), \tag{2}$$

$$F(0,t) = h(\alpha(0), t) = h(x_0, t) = \sigma(t), \tag{3}$$

$$F(s,0) = h(\alpha(s), 0) = f(\alpha(s)), \tag{4}$$

ja

$$F(1,t) = h(\alpha(1), t) = h(x_0, t) = \sigma(t). \tag{5}$$

Tästä nähdään, että

$$F \circ \omega \colon I \to Y$$

on polku

$$\underbrace{(g \circ \alpha^{\leftarrow})}_{(2)} \cdot \underbrace{(\sigma^{\leftarrow})}_{(3)} \cdot \underbrace{(f \circ \alpha)}_{(4)} \cdot \underbrace{(\sigma)}_{(5)} .$$

(Huom. käänteinen suunta kohdissa (2) ja (3)). Koska I^2 on konveksi, on $\omega \sim \epsilon_{z_0}$ I^2:ssa, mistä seuraa, että $F \circ \omega \sim F \circ \epsilon_{z_0} = \epsilon_{y_1}$ Y:ssä. Siis kaava (1) pätee.

Huom. Homotopialle $\sigma^{\leftarrow}(f \circ \alpha)\sigma \sim g \circ \alpha$ voi löytää seuraavan lausekkeen (Kristian Setälä):

$$H(s,t) = \begin{cases} \sigma^{\leftarrow}(3(1-t)s), & \text{jos } 0 \leq s \leq 1/3 \\ h(\alpha(3(s-\frac{1}{3})), t), & \text{jos } 1/3 \leq s \leq 2/3 \\ \sigma(3(1-t)(s-\frac{2}{3})+t), & \text{jos } 2/3 \leq s \leq 1. \end{cases}$$

2. Olkoon $f\colon X \to Y$ homotopiaekvivalenssi, $g\colon Y \to X$ f:n homotopiakäänteiskuvaus ja $x_0 \in X$.
Koska $g \circ f \simeq \mathrm{id}_X$, on edellisen tehtävän nojalla

$$(g \circ f)_* = \sigma_\sharp \circ (\mathrm{id}_X)_*,$$

missä σ on polku X:ssä pisteestä x_0 pisteeseen $gf(x_0)$. Siis

$$(g \circ f)_* = \sigma_\sharp\colon \pi(X, x_0) \to \pi(X, gf(x_0)).$$

Vastaavasti saadaan

$$(f \circ g)_* = \gamma_\sharp\colon \pi(Y, f(x_0)) \to \pi(Y, fgf(x_0)),$$

missä γ on polku Y:ssä pisteestä $f(x_0)$ pisteeseen $fgf(x_0)$.
Homomorfismit $\sigma_\sharp$ ja $\gamma_\sharp$ ovat isomorfismeja, joten $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$ ja $(f \circ g)_* = f_* \circ g_*$ ovat isomorfismeja:

$$\begin{tikzcd} \pi(X, x_0) \arrow[r, "f_*"] \arrow[dr, "\cong", "\sigma_\sharp"'] & \pi(Y, f(x_0)) \arrow[d, "g_*"'] \\ & \pi(X, gf(x_0)) \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} \pi(Y, f(x_0)) \arrow[d, "g_*"'] \arrow[dr, "\gamma_\sharp", "\cong"'] & \\ \pi(X, gf(x_0)) \arrow[r, "f_*"'] & \pi(Y, fgf(x_0)). \end{tikzcd}$$

Huom. Yllä olevissa kaavioissa funktio g_* on sama (samojen ryhmien välinen), mutta f_* ei ole (täsmällisempää olisi merkitä toista funktioista f'_* tms.).
Koska $\sigma_\sharp$ on bijektio, on ylemmän kaavion nojalla g_* surjektio. Koska $\gamma_\sharp$ on bijektio, on alemman kaavion nojalla g_* injektio. Siis g_* on bijektio. Koska ylemmässä kaaviossa $\sigma_\sharp$ ja g_* ovat bijektioita, on f_* bijektio, siis isomorfismi.

3. Olkoon $(Y, y_0) = (S^1, 1)$, $\alpha = \epsilon_1$ ja $\beta: I \to Y$ polku $\beta(t) = e^{4\pi i t}$. Tunnetusti (Lause V:25.2) on $\alpha \not\simeq \beta$. Olkoon $(X, x_0) = (S^1, 1)$ ja p peitekuvaus $p: S^1 \to S^1$, $p(z) = z^2$. Nyt $\tilde{\alpha} = \epsilon_1$, joten $\tilde{\alpha}(1) = 1$. Lisäksi polun β nosto on polku $\tilde{\beta}$: $\tilde{\beta}(t) = e^{2\pi i t}$, koska

$$p \circ \tilde{\beta}(t) = p(e^{2\pi i t}) = (e^{2\pi i t})^2 = e^{4\pi i t} = \beta(t).$$

Siis

$$\tilde{\beta}(1) = e^{2\pi i} = 1 = \tilde{\alpha}(1).$$

Helpompi esimerkki (Silja Polvi): $(X, x_0) = (Y, y_0) = (S^1, 1)$, $p = \mathrm{id}_{S^1}$, $\alpha(t) = e^{2\pi i t}$ ja $\beta(t) = e^{-2\pi i t}$. Tällöin $\tilde{\alpha}(1) = \tilde{\beta}(1) = 1$, mutta $\alpha \not\simeq \beta$.

4. a) Olkoon $p: X \to Y$ peitekuvaus.

1) p surjektio: sisältyy määritelmään.

2) p avoin: Olkoon $U \Subset X$, $y \in pU$. Olkoon V y:n peiteympäristö ja $p^{-1}V = \cup_{j \in J} U_j$ kuten määritelmässä. Valitaan $x \in U$ siten, että $p(x) = y$ ja olkoon U_{j_0} se joukoista U_j, joka sisältää pisteen x. Nyt $U_{j_0} \cap U \Subset U_{j_0}$.
Koska $p|: U_{j_0} \to V$ on homeomorfismi, on $p(U_{j_0} \cap U) \Subset V \Subset Y$. Siis $p(U_{j_0} \cap U)$ on y:n ympäristö ja $p(U_{j_0} \cap U) \subset pU$, joten pU on avoin.

3) p immersio: Olkoon $x \in X$. Olkoon $y = p(x)$, V y:n peiteympäristö, $p^{-1}V = \cup_{j \in J} U_j$ kuten edellä ja $j_0 \in J$ siten, että $x \in U_{j_0}$. Nyt U_{j_0} on x:n ympäristö ja $p|: U_{j_0} \to V$ on homeomorfismi, joten $p|U_{j_0}: U_{j_0} \to Y$ on upotus. Siis p on immersio.

Huom. Väisälän kirjassa sana "kuvaus" ei sisällä oletusta jatkuvuudesta. Esim. immersion määritelmästä seuraa, että immersio on aina jatkuva. Siis myös peitekuvaus on aina jatkuva.

b) Koska peitekuvaus on aina jatkuva avoin surjektio, se on samastuskuvaus Lauseen V:8.9 nojalla.

5. 1) (p_*, q_*) on homomorfismi:

$$(p_*, q_*)(\bar{\alpha}\bar{\beta}) = (p_*(\bar{\alpha}\bar{\beta}), q_*(\bar{\alpha}\bar{\beta})) = (p_*(\bar{\alpha})p_*(\bar{\beta}), q_*(\bar{\alpha})q_*(\bar{\beta}))$$

$$= (p_*(\bar{\alpha}), q_*(\bar{\alpha})) \cdot (p_*(\bar{\beta}), q_*(\bar{\beta})) = (p_*, q_*)(\bar{\alpha}) \cdot (p_*, q_*)(\bar{\beta}).$$

Toisessa välivaiheessa käytettiin tietoa, että p_* ja q_* ovat homomorfismeja ja kolmannessa välivaiheessa käytettiin tuloryhmän laskutoimituksen määritelmää.

2) (p_*, q_*) on injektio: Olkoon $\bar{\lambda} \in \pi(X \times Y, (x_0, y_0))$ luokka, jolle $(p_*, q_*)(\lambda) = (\bar{\epsilon}_{x_0}, \bar{\epsilon}_{y_0})$, joka on tuloryhmän neutraalialkio. Osoitetaan, että $\bar{\lambda} = \overline{\epsilon_{(x_0,y_0)}}$.
Nyt siis $p_*(\bar{\lambda}) = \overline{p \circ \lambda} = \overline{\epsilon_{x_0}}$ eli $p \circ \lambda \sim \epsilon_{x_0}$; olkoon $H_1 \colon I \times I \to X$ polkuhomotopia $p \circ \lambda \sim \epsilon_{x_0}$. Vastaavasti olkoon $H_2 \colon I \times I \to Y$ polkuhomotopia $q \circ \lambda \sim \epsilon_{y_0}$.
Nyt on helppo tarkistaa, että

$$(H_1, H_2) \colon I \times I \to X \times Y$$

$$(s,t) \mapsto (H_1(s,t), H_2(s,t))$$

on polkuhomotopia $\lambda = (p \circ \lambda, q \circ \lambda) \sim (\epsilon_{x_0}, \epsilon_{y_0}) = \epsilon_{(x_0,y_0)}$.
Siis $\bar{\lambda} = \overline{\epsilon_{(x_0,y_0)}}$.
3) (p_*, q_*) surjektio: Olkoon $(\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2) \in \pi(X, x_0) \times \pi(Y, y_0)$. Määritellään $\lambda \colon I \to X \times Y$ kaavalla $\lambda(s) = (\lambda_1(s), \lambda_2(s))$ eli $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2)$. Nyt

$$(p_*, q_*)(\bar{\lambda}) = (\overline{p \circ \lambda}, \overline{q \circ \lambda}) = (\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2).$$

Tämä osoittaa surjektiivisuuden.

1),2) & 3) $\Rightarrow (p_*, q_*)$ on isomorfismi.

Huom. Oletusta polkuyhtenäisyydestä ei tarvita.

6. 1) $f \colon S^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^2$, jolloin $f_* \colon \mathbb{Z} \to 0$ ei ole injektio

2) projektio $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, jolloin $f_* \colon 0 \to 0$ on injektio; tai f on homotopiaekvivalenssi $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to S^1$, $f(x) = x/|x|$, jolloin f_* on isomorfismi $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$

3) $f \colon I \to S^1$, $t \mapsto e^{2\pi i t}$, jolloin $f_* \colon 0 \to \mathbb{Z}$ ei ole surjektio

4) $f \colon \mathbb{R} \hookrightarrow \mathbb{R}^2$, jolloin $f_* \colon 0 \to 0$ on surjektio; tai f on inkluusio $S^1 \to \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, jolloin f_* on isomorfismi $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$.