

Homotopiateoria
Harjoitus 2. Ratkaisuja.

1. a) Koska Y on kutistuva, on olemassa homotopia $h: Y \times I \rightarrow Y$, $\text{id}_Y \simeq c_{y_0}$ jollakin $y_0 \in Y$ (tässä siis c_{y_0} on vakiokuvaus $c_{y_0}(y) \equiv y_0$). Merkitään $c'_{y_0}: X \rightarrow Y$ vakiokuvaus $c'_{y_0}(x) \equiv y_0$. Määritellään

$$H: X \times I \rightarrow Y$$

$$H(x, t) = h(f(x), t).$$

Selvästi H on jatkuva. Lisäksi $H(x, 0) = h(f(x), 0) = f(x)$ ja $H(x, 1) = h(f(x), 1) = y_0$ jokaisella $x \in X$, joten $H: f \simeq c'_{y_0}$.

Vastaavasti $g \simeq c'_{y_0}$, joten $f \simeq c'_{y_0} \simeq g$.

b) Kts. Väisälä, Esim. 21.10.2.

2. Merkitään pisteiden $(0, 0)$, $(1, 0)$ ja $(0, 1)$ määräämää kolmiota K :lla ja lisäksi merkitään $S_1 = \{0\} \times [1, \infty[$, $S_2 = [1, \infty[\times \{0\}$, $S_3 = \{0\} \times] - \infty, 0]$ ja $S_4 =] - \infty, 0] \times \{0\}$, jolloin $X = K \cup S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup S_4$.

Määritellään sitten $f: X \rightarrow K$:

$$f(a) = \begin{cases} a, & \text{jos } a \in K \\ (0, 1), & \text{jos } a \in S_1 \\ (1, 0), & \text{jos } a \in S_2 \\ (0, 0), & \text{jos } a \in S_3 \\ (0, 0), & \text{jos } a \in S_4. \end{cases}$$

Merkitään inklusiota $i: K \rightarrow X$. Selvästi $f \circ i = \text{id}_K$. Janahomotopia osoittaa, että $i \circ f \simeq \text{id}_X$. Siis $K \simeq X$. Voidaan pitää tunnettuna, että $K \approx S^1$. Siis $X \simeq S^1$.

3. Oletetaan, että X on polkuyhtenäinen, $x_0 \in X$ ja $\alpha: I \rightarrow X$ polku. Osoitetaan ensin, että $\alpha \simeq \epsilon_{x_0}$.

Määritellään

$$H_1: I \times I \rightarrow X$$

$$(s, t) \mapsto \alpha(ts),$$

jolloin $H_1: \epsilon_{\alpha(0)} \simeq \alpha$.

Olkoon β polku pisteestä $\alpha(0)$ pisteeseen x_0 . Määritellään

$$H_2: I \times I \rightarrow X$$

$$(s, t) \mapsto \beta(t),$$

jolloin $H_2: \epsilon_{\alpha(0)} \simeq \epsilon_{x_0}$. Siis

$$\alpha \simeq \epsilon_{\alpha(0)} \simeq \epsilon_{x_0}.$$

Olkoot nyt $\alpha, \gamma: I \rightarrow X$ polkuja. Osoitetaan, että $\alpha \simeq \gamma$: Edellisen nojalla jokainen polku on homotooppinen vakiopolun ϵ_{x_0} kanssa, joten

$$\alpha \simeq \epsilon_{x_0} \simeq \gamma.$$

4. Määritellään homotopia H osajoukoissa

$$A_1 = \{(s, t) \mid 0 \leq t \leq 1, 0 \leq s \leq t/2\},$$

$$A_2 = \{(s, t) \mid 0 \leq t \leq 1, t/2 \leq s \leq 1/2\},$$

$$A_3 = \{(s, t) \mid 0 \leq t \leq 1, 1/2 \leq s \leq 1 - (t/2)\}$$

ja

$$A_4 = \{(s, t) \mid 0 \leq t \leq 1, 1 - (t/2) \leq s \leq 1\}$$

kaavoilla

$$H(s, t) = \begin{cases} b, & \text{jos } (s, t) \in A_1 \\ \alpha(1 - 2s + t), & \text{jos } (s, t) \in A_2 \\ \alpha(2s + t - 1), & \text{jos } (s, t) \in A_3 \\ b, & \text{jos } (s, t) \in A_4. \end{cases}$$

Tarkistetaan, että H on hyvin määritelty:

- joukossa $A_1 \cap A_2$ on $0 \leq t \leq 1, s = t/2$ ja $\alpha(1 - 2s + t) = \alpha(1 - t + t) = \alpha(1) = b$.
- joukossa $A_2 \cap A_3$ on $0 \leq t \leq 1, s = 1/2$ joten $\alpha(1 - 2s + t) = \alpha(1 - 1 + t) = \alpha(t)$ ja $\alpha(2s + t - 1) = \alpha(1 + t - 1) = \alpha(t)$; saadaan siis sama tulos.
- joukossa $A_3 \cap A_4$ on $0 \leq t \leq 1, s = 1 - (t/2)$, ja $\alpha(2s + t - 1) = \alpha(2 - t + t - 1) = \alpha(1) = b$.

Siis H on hyvin määritelty; jatkuvuus seuraa harjoitusten 1 tehtävästä 1 b).
Nyt

$$H(s, 0) = \begin{cases} \alpha(1 - 2s), & \text{jos } 0 \leq s \leq 1/2 \\ \alpha(2s - 1), & \text{jos } 1/2 \leq s \leq 1, \end{cases}$$

toisaalta

$$\alpha^\leftarrow \alpha(s) = \begin{cases} \alpha^\leftarrow(2s) = \alpha(1 - 2s), & \text{jos } 0 \leq s \leq 1/2 \\ \alpha(2s - 1), & \text{jos } 1/2 \leq s \leq 1, \end{cases}$$

joten $H(s, 0) = \alpha^\leftarrow \alpha(s)$ jokaisella s . Selvästi $H(s, 1) = b$ jokaisella s , joten

$$H: \alpha^\leftarrow \alpha \sim \epsilon_b.$$

5. Oletetaan, että X on polkuyhtenäinen, $z \in X$ ja $\alpha: I \rightarrow X$ on polku. Osoitetaan, että on olemassa polku $\beta: I \rightarrow X$ s.e. $\alpha \sim \beta$ ja β saa arvon z . Olkoon $a = \alpha(0)$ ja σ polku pisteestä a pisteeseen z . Määritellään $\beta = (\sigma\sigma^\leftarrow)\alpha$. Selvästi β saa arvon z ja

$$\beta = (\sigma\sigma^\leftarrow)\alpha \sim \epsilon_a \sim \alpha.$$

6. a) Määritellään $f_1: X \rightarrow X$, $(x, y) \mapsto (x, 0)$ ja $f_2: X \rightarrow X$, $(x, y) \mapsto (0, 0)$.
Nyt

$$H_1: X \times I \rightarrow X$$

$$(x, y, t) \mapsto (x, (1 - t)y)$$

on homotopia $\text{id}_X \simeq f_1$ ja

$$H_2: X \times I \rightarrow X$$

$$(x, y, t) \mapsto ((1 - t)x, 0)$$

on homotopia $f_1 \simeq f_2$. Siis

$$\text{id}_X \simeq f_1 \simeq f_2,$$

joka on vakiokuvaus. Siis X on kutistuva.

b) Antiteesi: On olemassa homotopia $H: X \times I \rightarrow X$, $\text{id}_X \simeq c_{(0,1)} \text{ rel } (0, 1)$. Merkitään $U = B((0, 1), 1/2) \cap X$, joka on pisteen $(0, 1)$ ympäristö X :ssä. Nyt oletuksen nojalla $H((0, 1), t) = (0, 1) \in U$ jokaisella $t \in I$, joten

$$\{(0, 1)\} \times I \subset H^{-1}U \subseteq X \times I.$$

Koska $\{(0, 1)\}$ ja I ovat kompakteja, on Lauseen V:15.24 nojalla olemassa pisteen $(0, 1)$ ympäristö V X :ssä, s.e.

$$V \times I \subset H^{-1}U,$$

eli $H(\bar{x}, t) \in U$ jokaisella $\bar{x} \in V$, $t \in I$. (*)

Valitaan nyt $n \in \mathbb{N}$ s.e. $(1/n, 1) \in V$. Nyt

$$\alpha: I \rightarrow X, \alpha(t) = H((1/n, 1), t)$$

on polku X :ssä pisteestä $(1/n, 1)$ pisteeseen $(0, 1)$ ja y.o. tiedon (*) nojalla $\alpha(t) \in U$ jokaisella $t \in I$.

Voidaan pitää selvänä, että pisteitä $(1/n, 1)$ ja $(0, 1)$ ei voi yhdistää polulla U :ssa, joten olemme päätyneet ristiriitaan. Siis k.o. homotopiaa ei ole olemassa.