Homotopiateoria

Harjoitus 1 (10.9.2015)

Harjoitustehtävistä saa lisäpisteitä tenttiä varten seuraavasti:
30% $\to$ 1, 40% $\to$ 2, ... , 80% $\to$ 6 pistettä.

1. Oletetaan, että X ja Y ovat topologisia avaruuksia ja $f\colon X \to Y$ on funktio.

a) Oletetaan, että $\{A_i\}_{i\in I}$ on X:n avoin peite ja $f|A_i\colon A_i \to Y$ on jatkuva jokaisella $i \in I$. Osoita, että f on jatkuva.

b) Oletetaan, että $\{A_1, ..., A_n\}$ on X:n äärellinen suljettu peite ja $f|A_i\colon A_i \to Y$ on jatkuva jokaisella $i \in \{1, ..., n\}$. Osoita, että f on jatkuva.

2. a) Osoita esimerkillä, että äärellisyysoletus tehtävässä 1 b) on oleellinen.
b) Osoita, että kirjan Lauseen 21.3 (3)-kohdan funktio h on jatkuva.

3. Väisälä, s. 73, tehtävä 9:6

4. Väisälä, s. 154, tehtävä 21:9

5. Väisälä, s. 154, tehtävä 21:11

6. Seuraavassa tärkeä yhteys homotopian ja kuvausten jatkamisen välillä:

Olkoon Y topologinen avaruus ja $f\colon S^n \to Y$ jatkuva funktio, $n \in \{1, 2, ...\}$. Osoita, että seuraavat ehdot ovat yhtäpitäviä:

1) f on nollahomotooppinen

2) f:llä on jatkuva jatke $g\colon \bar{B}^{n+1} \to Y$.

Homotopy theory

Exercise 1 (10.9.2015)

From the exercises you can get bonus points for the exam as follows:
30% $\to$ 1, 40% $\to$ 2, ... , 80% $\to$ 6 points.

1. Suppose X and Y are topological spaces and $f\colon X \to Y$ is a function.

a) Suppose that $\{A_i\}_{i\in I}$ is an open cover of X and $f|A_i\colon A_i \to Y$ is continuous for every $i \in I$. Prove that f is continuous.

b) Suppose that $\{A_1, ..., A_n\}$ is a finite closed cover of X and $f|A_i\colon A_i \to Y$ is continuous for every $i \in \{1, ..., n\}$. Prove that f is continuous.

2. a) Prove (by giving an example) that the finiteness assumption in exercise 1 b) is essential.

b) Prove that the function h in Proposition 21.3 (3) is continuous.

3. Väisälä, p. 73, Exercise 9:6.

The *cone* of a space X is the space $c(X) = (X \times I)/(X \times \{1\})$. Prove that $c(S^{n-1}) \approx \bar{B}^n$.

4. Väisälä, p. 154, Exercise 21:9.

Prove: A continuous map $f\colon X \to Y$ is a homotopy equivalence if and only if there exist such continuous maps $g_1, g_2\colon Y \to X$ that $g_1 \circ f \simeq \mathrm{id}$ and $f \circ g_2 \simeq \mathrm{id}$. Hint: Consider the map $g_1 \circ f \circ g_2$.

5. Väisälä, p. 154, Exercise 21:11.

Let $c(X)$ be the cone of the space X as in Exercise 3. We can identify X with the set $\{\{(x, 0)\} \mid x \in X\} \subset c(X)$. Prove that a continuous map $f\colon X \to Y$ is null homotopic if and only if f has a continuous extension $g\colon c(X) \to Y$.

6. The following is an important connection between homotopy and extending maps:

Let Y be a topological space and $f\colon S^n \to Y$ a continuous function, $n \in \{1, 2, ...\}$. Prove that the following are equivalent:

1) f is null homotopic.

2) f has a continuous extension $g\colon \bar{B}^{n+1} \to Y$.