Homotopiateoria
Harjoitus 1, ratkaisuja.

1. a) Olkoon $U \overset{\circ}{\subset} Y$. On osoitettava, että $f^{-1}U \overset{\circ}{\subset} X$. Nyt jokaisella $i \in I$ on $(f|A_i)^{-1}U \overset{\circ}{\subset} A_i$ ja $(f|A_i)^{-1}U = A_i \cap f^{-1}U$, joten $A_i \cap f^{-1}U \overset{\circ}{\subset} A_i \overset{\circ}{\subset} X$. Lisäksi

$$f^{-1}U = \bigcup_{i \in I} (A_i \cap f^{-1}U) \overset{\circ}{\subset} X,$$

mikä todistaa väitteen.
b) Olkoon $F \overset{\mathrm{c}}{\subset} Y$. On osoitettava, että $f^{-1}F \overset{\mathrm{c}}{\subset} X$. Nyt jokaisella $i \in \{1, ..., n\}$ on $(f|A_i)^{-1}F \overset{\mathrm{c}}{\subset} A_i$ ja $(f|A_i)^{-1}F = A_i \cap f^{-1}F$, joten $A_i \cap f^{-1}F \overset{\mathrm{c}}{\subset} A_i \overset{\mathrm{c}}{\subset} X$. Lisäksi

$$f^{-1}F = \bigcup_{i=1}^{n} (A_i \cap f^{-1}F),$$

joka on X:n suljettu osajoukko, koska yhdiste on äärellinen. Tämä todistaa väitteen.

2. a) Olkoon $X = Y = \mathbb{R}$ tavallisella topologialla varustettuna ja $f\colon X \to Y$ mikä tahansa epäjatkuva funktio, esim. $f = \chi_{\mathbb{Q}}$. Nyt $\{x\}_{x \in X}$ on X:n suljettu peite ja selvästi $f|\{x\}$ on jatkuva jokaisella $x \in X$. Kuitenkin f on epäjatkuva.
b) Lausekkeet $h'(x, 2t)$ ja $h''(x, 2t-1)$ ovat samat arvolla $t = 1/2$, koska $h'(x, 1) = f_2(x) = h''(x, 0)$, joten nämä lausekkeet määrittelevät funktion $h\colon X \times I \to Y$.
Valitaan $A_1 = X \times [0, 1/2] \overset{\mathrm{c}}{\subset} X \times I$ ja $A_2 = X \times [1/2, 1] \overset{\mathrm{c}}{\subset} X \times I$. Nyt $h|A_1$ on jatkuva, koska

$$\begin{aligned} X \times [0, 1/2] &\to Y \\ (x, t) &\mapsto h'(x, 2t) \end{aligned}$$

on jatkuva. Samoin $h|A_2$ on jatkuva, joten tehtävän 1 b) nojalla h on jatkuva.

3. Palautetaan mieleen: $c(X) = (X \times I)/(X \times \{1\})$.
Väite: $c(S^{n-1}) \approx \bar{B}^n$
Todistus. Määritellään funktio $f\colon S^{n-1} \times I \to \bar{B}^n$ kaavalla $f(x, t) = (1-t)x$. Selvästi $f(S^{n-1} \times \{1\}) = \{\bar{0}\}$. Osoitetaan, että $f|\colon S^{n-1} \times [0, 1[\to \bar{B}^n \setminus \{\bar{0}\}$ on bijektio: Havaitaan ensin, että jos $x \in S^{n-1}$ ja $0 \le t < 1$, on $\|(1-t)x\| = 1 - t \neq 0$, joten $(1-t)x \neq \bar{0}$. Määritellään sitten

$$g\colon \bar{B}^n \setminus \{\bar{0}\} \to S^{n-1} \times [0, 1[$$

kaavalla

$$g(x) = \left(\frac{x}{\|x\|}, 1 - \|x\|\right).$$

Huom. Koska $x \in \bar{B}^n$ ja $x \neq \bar{0}$, niin $1 - \|x\| \in [0, 1[$. On helppo tarkistaa, että f ja g ovat toistensa käänteiskuvauksia, erityisesti siis $f|$ on bijektio. Siis $c(S^{n-1}) = (S^{n-1} \times I)/R_f$ (kts. V:9.9) ja saadaan

$$\begin{tikzcd} S^{n-1} \times I \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p"'] & \bar{B}^n \\ (S^{n-1} \times I)/R_f \arrow[ur, "f^*"'] & \end{tikzcd}$$

Nyt $S^{n-1} \times I$ on kompakti, joten Lauseen V:8.10 nojalla f on samastuskuvaus ja Lauseen V:9.10 nojalla $f^*\colon c(S^{n-1}) = (S^{n-1} \times I)/R_f \to \bar{B}^n$ on homeomorfismi.

4. "$\Rightarrow$" selvä, koska jos g on f:n homotopiainverssi, niin voidaan valita $g_1 = g_2 = g$.
"$\Leftarrow$" Osoitetaan, että $g_1 \circ f \circ g_2\colon Y \to X$ on f:n homotopiainverssi.
1) $(g_1 \circ f \circ g_2) \circ f = g_1 \circ (f \circ g_2) \circ f \simeq g_1 \circ \mathrm{id} \circ f = g_1 \circ f \simeq \mathrm{id}$.
2) $f \circ (g_1 \circ f \circ g_2) = f \circ (g_1 \circ f) \circ g_2 \simeq f \circ \mathrm{id} \circ g_2 = f \circ g_2 \simeq \mathrm{id}$.
Väite seuraa kohdista 1) ja 2).

5. (Kts. V:9.6)
"$\Rightarrow$" Oletetaan, että $f\colon X \to Y$ on nollahomotooppinen, olkoon $h\colon f \simeq c_{y_0}$.

$$\begin{tikzcd} X \times I \arrow[r, "h"] \arrow[d, "p"'] & Y \\ c(X) \arrow[ur, "\bar{h}"'] & \end{tikzcd}$$

Määritellään

$$\bar{h}\colon c(X) \to Y$$

$$\bar{h}(\{x, t\}) = h(x, t),\ x \in X,\ t \in [0, 1[$$

$$\bar{h}(X \times \{1\}) = y_0.$$

Tällöin kaavio kommutoi, koska $h(x, 1) = y_0$ jokaisella $x \in X$. Koska h on jatkuva, on $\bar{h}$ jatkuva Lauseen V:9.4 kohdan (2) nojalla.

Lisäksi kun samastetaan $x \in X$ ja $\{(x,0)\} \in c(X)$, saadaan

$$\bar{h}(x) = h(x,0) = f(x)$$

eli $\bar{h}$ on f:n jatke.

"$\Leftarrow$" Olkoon $g\colon c(X) \to Y$ f:n jatke.

$$\begin{tikzcd} X \times I \arrow[r] \arrow[d, "p"'] & Y \\ c(X) \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$

Määritellään $h = g \circ p\colon X \times I \to Y$. Nyt $h(x,0) = g(\{(x,0)\}) = f(x)$, koska g on f:n jatke; lisäksi $h(x,1)$ on vakio, koska $p(x,1)$ on vakio. Siis h on homotopia f:n ja vakiokuvauksen välillä.

6. Tehtävän 5 nojalla nollahomotooppisuus on yhtäpitävää sen kanssa että f voidaan jatkaa kartiolle $c(S^n)$, missä on samastettu S^n ja $S^n \times \{0\} \subset c(S^n)$. Tehtävä 3 antaa homeomorfismin $c(S^n) \to \bar{B}^{n+1}$, jossa S^n kuvautuu S^n:lle. Tämän homeomorfismin avulla saadaan, että f voidaan jatkaa kartiolle $c(S^n)$ jos ja vain jos f voidaan jatkaa kuulalle $\bar{B}^{n+1}$.
Väite seuraa näistä havainnoista.