Homotopy theory
Exercise 13 (10.12.2015)

1. a) Denote by $\mathbb{R}P^n$ the real projective spaces (which were denoted P^n in Example 1.8 in the lecture notes). Using our knowledge concerning homotopy groups of spheres, calculate the homotopy groups $\pi_k(\mathbb{R}P^n)$ for $k \leq n$.

b) If $k < n$, then $\mathbb{R}P^k$ can be identified as a subset of $\mathbb{R}P^n$ in a natural way (how?). Prove that there doesn't exist a retraction $\mathbb{R}P^n \to \mathbb{R}P^k$.

2. Fill in the following details in the lecture notes.

a) The proof of Proposition 7.15, case $\dim K = 0$. Verify that G is well defined and that the condition $p \circ G = H$ holds.

b) Proposition 7.17, in the proof that the boundary map is well defined. We have the homotopy $G: I^n \times I \to E$, whose restriction to $I^{n-1} \times I$ gives a homotopy $\gamma \simeq \gamma'$ rel ∂I^{n-1}. So γ and γ' are homotopic as maps into E, but we should have that they are homotopic as maps into F. Problem?

Remark: In the lecture notes I denoted the homotopy by F, but that is not good notation, since F denotes also a subset of E. So I changed F to G for the homotopy.

3. Prove that the Hopf map $p: S^3 \to \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ is continuous.

4. In the proof that (S^2, p, S^3, S^1) is a fiber bundle: Verify that the maps φ_U and ψ_U are well defined, continuous, and inverse to each other.

5. Consider the open covering $\{\,]-n, n[\mid n \in \mathbb{N}\}$ of $\mathbb{R}$.

a) Prove that this covering doesn't have a locally finite subcovering.

b) Find an open locally finite refinement for this covering.

c) Construct a partition of unity subordinate to this covering.

6. Prove the following details in Proposition A.5.

- the functions h_j are continuous
- $\mathrm{spt}(h_j) \subset U_j$ for each $j \in J$
- the family (h_j) is the desired partition of unity.

Homotopiateoria
Harjoitus 13 (10.12.2015)

1. a) Merkitään reaalisia projektiivisia avaruuksia $\mathbb{R}P^n$ (niitä merkittiin P^n luentomonisteen Esimerkissä 1.8). Käyttäen tietojamme pallojen homotopiaryhmistä, laske homotopiaryhmät $\pi_k(\mathbb{R}P^n)$, missä $k \leq n$.

b) Jos $k < n$, niin $\mathbb{R}P^k$ voidaan luonnollisella tavalla samastaa avaruuden $\mathbb{R}P^n$ aliavaruudeksi (miten?). Osoita, että ei ole olemassa retraktiota $\mathbb{R}P^n \to \mathbb{R}P^k$.

2. Täydennä seuraavat yksityiskohdat luentomonisteeseen.

a) Lauseen 7.15 todistus, tapaus $\dim K = 0$. Osoita, että G on hyvin määritelty, ja että ehto $p \circ G = H$ pätee.

b) Lause 7.17, todistus sille, että reunakuvaus ∂ on hyvin määritelty. On määritelty homotopia $G\colon I^n \times I \to E$, jonka rajoittuma joukkoon $I^{n-1} \times I$ on homotopia $\gamma \simeq \gamma'$ rel ∂I^{n-1}. Siis γ ja γ' ovat homotooppiset kuvauksina avaruuteen E, mutta tarvitsisimme sen, että ne ovat homotooppiset kuvauksina avaruuteen F. Ongelma?

Huomautus: Luentomuistiinpanoissa merkitsin tätä homotopiaa symbolilla F, mutta tämä ei ole hyvä merkintä, koska F tarkoittaa tässä myös avaruuden E osajoukkoa. Muutin siis homotopian symboliksi kirjaimen G.

3. Osoita, että Hopfin kuvaus $p\colon S^3 \to \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ on jatkuva.

4. Todistus, jossa osoitetaan, että (S^2, p, S^3, S^1) on säiekimppu: Tarkista, että kuvaukset φ_U ja ψ_U ovat hyvin määriteltyjä, jatkuvia, ja toistensa käänteiskuvauksia.

5. Tarkastellaan $\mathbb{R}$:n avointa peitettä $\{]-n, n[\mid n \in \mathbb{N}\}$.
a) Osoita, että tällä peitteellä ei ole lokaalisti äärellistä osapeitettä.
b) Muodosta peitteelle avoin lokaalisti äärellinen tihennys.
c) Konstruoi peitteeseen sopiva ykkösen ositus.

6. Osoita seuraavat yksityiskohdat Lauseen A.5 todistuksesta.
a) funktiot h_j ovat jatkuvia
b) $\mathrm{spt}(h_j) \subset U_j$ jokaisella $j \in J$
c) perhe (h_j) on haettu ykkösen ositus