Homotopiateoria
Harjoitus 13. Ratkaisuja.

1. a) Tiedämme jo (Esimerkki 1.8), että $\pi_1(\mathbb{R}P^1) \cong \mathbb{Z}$ ja $\pi_1(\mathbb{R}P^n) \cong \mathbb{Z}_2$, kun $n \geq 2$.
Koska $p_n\colon S^n \to \mathbb{R}P^n$ on peitekuvaus, saadaan korkeammat homotopiaryhmät suoraan Korollaarin 7.21 avulla: kun $2 \leq k < n$, on $\pi_k(\mathbb{R}P^n) \cong \pi_k(S^n) = 0$ ja kun $n \geq 2$, on $\pi_n(\mathbb{R}P^n) \cong \pi_n(S^n) = \mathbb{Z}$.
b) Olkoon $\bar{x} = (x_1, ..., x_{k+1}) \in S^k$. Samastetaan S^k avaruuden S^n $(k < n)$ aliavaruudeksi upotuksen $\bar{x} \mapsto (x_1, ..., x_{k+1}, 0, ..., 0)$ avulla. Käyttäen tätä ideaa samastetaan $\mathbb{R}P^k$ avaruuden $\mathbb{R}P^n$ aliavaruudeksi käyttäen upotusta $[\bar{x}] \mapsto [(x_1, ..., x_{k+1}, 0, ..., 0)]$.
Oletetaan, että olisi olemassa retraktio $r\colon \mathbb{R}P^n \to \mathbb{R}P^k$. Jos i on inkluusio, niin $r \circ i = \mathrm{id}_{\mathbb{R}P^k}$, ja

$$r_* \circ i_* = (r \circ i)_* = \mathrm{id}_* = \mathrm{id}\colon \pi_k(\mathbb{R}P^k) \to \pi_k(\mathbb{R}P^k).$$

Tästä seuraa, että $r_*\colon \pi_k(\mathbb{R}P^n) \to \pi_k(\mathbb{R}P^k)$ on surjektio, mikä on mahdotonta, koska $\pi_k(\mathbb{R}P^k) \neq 0$ ja $\pi_k(\mathbb{R}P^n) = 0$.

2. a) Hyvin määritelty: On osoitettava, että arvolla $t = t_i$ "uusi kaava" antaa tulokseksi jo määritellyn arvon $G(K, t_i)$. Havaitaan ensin, että

$$H(K, t_i) = p \circ G(K, t_i) = pr_1 \varphi_\alpha^{-1} G(K, t_i),$$

joten

$$\varphi_\alpha(H(K, t_i), pr_2\varphi_\alpha^{-1}(G(K, t_i))) = \varphi_\alpha(pr_1\varphi_\alpha^{-1}G(K, t_i), pr_2\varphi_\alpha^{-1}(G(K, t_i)))$$

$$= \varphi_\alpha(\varphi_\alpha^{-1}(G(K, t_i)) = G(K, t_i).$$

Ehto $p \circ G = H$: Koska $p \circ \varphi_\alpha = pr_1$, saadaan

$$p \circ G(K, t) = pr_1(H(K, t), pr_2\varphi_\alpha^{-1}(G(K, t_i))) = H(K, t).$$

b) Havaitaan ensin, että $H(I^{n-1} \times I) \subset H(\partial I^n \times I) = \{b_0\}$. Koska G on H:n nosto, on siis $G(I^{n-1} \times I) \subset p^{-1}(b_0) = F$. Siis homotopian G kuva sisältyy joukkoon F ja $\gamma \simeq \gamma'$ avaruudessa F.

3. Olkoon $(z_0, z_0') \in S^3$.
Tapaus 1) $z_0' \neq 0$. Valitaan pisteelle ympäristö, jonka jokaisessa pisteessä toinen koordinaatti $z' \neq 0$. Jatkuvuus seuraa jakolaskun jatkuvuudesta.
Tapaus 2) $z_0' = 0$. Tällöin $p(z_0, 0) = \infty$. Olkoon V pisteen ∞ ympäristö; voidaan olettaa, että

$$V = (\mathbb{C} \setminus \bar{B}(0, M)) \cup \{\infty\},$$

missä $M \in \mathbb{R},\ M > 0$. Huomataan, että tässä tilanteessa $|z_0| = 1$. Olkoon

$$U = \{(z, z') \in S^3 \mid |z| > \frac{1}{2},\ |z'| < \frac{1}{2M}\},$$

joka on pisteen $(z_0, 0)$ ympäristö S^3:ssa.
Olkoon nyt $(z, z') \in U$. Jos $z' = 0$, niin $p(z, z') = \infty \in V$. Jos taas $z' \neq 0$, on

$$|p(z, z')| = \left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|} > \frac{1/2}{1/2M} = M,$$

joten tässäkin tapauksessa $p(z, z') \in V$.

4. Huomataan ensin, että $z\bar{z} + 1 = |z|^2 + 1 > 0$, joten lausekkeen nimittäjä on $\neq 0$. Tarkistetaan sitten, että $\varphi_U(z, \xi) \in S^3$:

$$\left\| \left(\frac{\xi z}{\sqrt{z\bar{z}+1}}, \frac{\xi}{\sqrt{z\bar{z}+1}} \right) \right\|^2 = \frac{\xi z \bar{\xi} \bar{z}}{z\bar{z}+1} + \frac{\xi\bar{\xi}}{z\bar{z}+1} = \frac{\xi\bar{\xi}(z\bar{z}+1)}{z\bar{z}+1} = 1,$$

jossa käytettiin tietoa $|\xi|^2 = \xi\bar{\xi} = 1$.
Havaitaan, että $p^{-1}(U) = \{(z, z') \mid z' \neq 0\}$. Koska $\xi \in S^1$, on $\xi/\sqrt{z\bar{z}+1} \neq 0$, joten $\varphi_U(z, \xi) \in p^{-1}(U)$.
Jatkuvuus ok.
Tarkastellaan sitten funktiota $\psi_U \colon p^{-1}(U) \to U \times S^1$,

$$(z, z') \mapsto \left(\frac{z}{z'}, \frac{z'}{|z'|} \right).$$

Koska $(z, z') \in p^{-1}(U)$, niin $z' \neq 0$, joten $z/z' \in U$, ja $z'/|z'| \in S^1$.
Jatkuvuus ok.
Lasketaan sitten yhdistetyt funktiot: Tutkitaan ensin lauseketta

$$\varphi_U \psi_U(z, z') = \varphi_U \left(\frac{z}{z'}, \frac{z'}{|z'|} \right).$$

Funktion φ_U nimittäjässä olevasta lausekkeesta tulee tässä

$$\sqrt{\frac{z}{z'}\frac{\bar{z}}{\bar{z}'}+1} = \sqrt{\frac{z\bar{z}+z'\bar{z}'}{z'\bar{z}'}} = \sqrt{\frac{1}{z'\bar{z}'}} = \frac{1}{|z'|}.$$

Tässä käytettin tietoa $(z, z') \in S^3$, jolloin $z\bar{z} + z'\bar{z}' = 1$. Siis

$$\varphi_U\psi_U(z, z') = \left(\frac{zz'}{z'|z'|}\cdot|z'|, \frac{z'}{|z'|}\cdot|z'|\right) = (z, z').$$

Lopuksi

$$\psi_U\varphi_U(z, \xi) = \psi_U\left(\frac{\xi z}{\sqrt{z\bar{z}+1}}, \frac{\xi}{\sqrt{z\bar{z}+1}}\right) = (z, \xi),$$

missä käytettiin havaintoa

$$\left|\frac{\xi}{\sqrt{z\bar{z}+1}}\right| = \frac{1}{\sqrt{z\bar{z}+1}},$$

mikä taas seuraa siitä, että $|\xi| = 1$.

Tehtävien 5 ja 6 aihepiiri, parakompaktisuus, on lisämateriaalia, josta en tule kysymään tentissä. Lisään nämä ratkaisut myöhemmin.