**Homotopy theory**
**Exercise 12 (3.12.2015)**

1. Väisälä, p. 72, Exercise 9:2
Suppose that $R$ is an equivalence relation in a space $X$, and $S$ is an equivalence relation in a space $Y$. Let $f\colon X \to Y$ be a function, which satisfies the condition

$$xRx' \;\Rightarrow\; f(x)Sf(x')$$

for all $x, x' \in X$. Prove that there exists exactly one function $\hat{f}\colon X/R \to Y/S$ for which $\hat{f} \circ p_R = p_S \circ f$. Prove that $\hat{f}$ is continuous if $f$ is continuous.

2. Väisälä, p. 73, Exercise 9:7
The *suspension* of a space $X$ is the space

$$S(X) = (X \times [-1, 1])/R,$$

where the equivalence classes of $R$ are $X \times \{1\}$, $X \times \{-1\}$ and the singletons $\{z\}$, where $z \in X \times ]-1, 1[$. Prove that $S(S^{n-1}) \approx S^n$.

3. In the following we identify $S^n$ as a subset of $S^{n+1}$ using the embedding $\bar{x} \mapsto (\bar{x}, 0)$.
Suppose that $f\colon S^n \to S^m$ is a continuous map. Prove that there exists a continuous map $\bar{f}\colon S(S^n) \to S(S^m)$ such that the diagram

$$\begin{tikzcd}
S^n \times [-1,1] \arrow[r, "f \times \mathrm{id}"] \arrow[d, "p_1"'] & S^m \times [-1,1] \arrow[d, "p_2"] \\
S(S^n) \arrow[r, dotted, "\bar{f}"] & S(S^m)
\end{tikzcd}$$

commutes. Using this, define a continuous map $\hat{f}\colon S^{n+1} \to S^{m+1}$ such that the diagram

$$\begin{tikzcd}
S^n \arrow[r, "f"] \arrow[d, hook] & S^m \arrow[d, hook] \\
S^{n+1} \arrow[r, dotted, "\hat{f}"] & S^{m+1}
\end{tikzcd}$$

commutes.

Using the construction above one can define the so called *suspension homomorphism*

$$E\colon \pi_k(S^n) \to \pi_{k+1}(S^{n+1})$$
$$[f] \mapsto [\hat{f}]$$

and one can prove the Freudenthal suspension theorem: the homomorphism $E$ is an isomorphism, if $k < 2n - 1$ and surjective, if $k = 2n - 1$. (We don't have time to go through the proof. See for example Hu: Homotopy theory, Theorem 2.1, p. 312, or a more general version in Spanier: Algebraic Topology, Theorem 11, p. 458).
We already know all homotopy groups of $S^1$, the fundamental group of all spheres $S^n$, and we shall prove that $\pi_2(S^2) \cong \mathbb{Z}$. Using this information and the Freudenthal theorem, prove that

a) $\pi_k(S^n) = 0$, if $k < n$

b) $\pi_n(S^n) \cong \mathbb{Z}$ for every $n \geq 1$.

4. Consider the end of the homotopy sequence of a fibration:

$$\pi_1(E, e_0) \xrightarrow{p_*} \pi_1(B, b_0) \xrightarrow{\partial} \pi_0(F, e_0) \xrightarrow{i_*} \pi_0(E, e_0) \xrightarrow{p_*} \pi_0(B, b_0) \longrightarrow 0,$$

where $\pi_0$ is the set of path components of the space (no group structure is defined in $\pi_0$). In this case, what are the functions $\partial$, $i_*$ and $p_*$? How could one define the kernel of a function (hint: the base point)?

5. Investigate the exactness of the above sequence at $\pi_0(F, e_0)$ and $\pi_0(B, b_0)$.

6. Prove the claim contained in Remark 7.22.

**Homotopiateoria**
**Harjoitus 12 (3.12.2015)**

1. Väisälä, s. 72, tehtävä 9:2

2. Väisälä, s. 73, tehtävä 9:7

3. Seuraavassa tulkitaan $S^n$ $S^{n+1}$:n osajoukoksi upotuksen $\bar{x} \mapsto (\bar{x}, 0)$ välityksellä. Oletetaan, että $f\colon S^n \to S^m$ on jatkuva kuvaus. Osoita, että on olemassa jatkuva kuvaus $\bar{f}\colon S(S^n) \to S(S^m)$ siten, että kaavio

$$\begin{tikzcd} S^n \times [-1,1] \arrow[r, "f\times \mathrm{id}"] \arrow[d, "p_1"'] & S^m \times [-1,1] \arrow[d, "p_2"] \\ S(S^n) \arrow[r, dotted, "\bar{f}"] & S(S^m) \end{tikzcd}$$

kommutoi. Määrittele tämän avulla jatkuva kuvaus $\hat{f}\colon S^{n+1} \to S^{m+1}$ siten, että kaavio

$$\begin{tikzcd} S^n \arrow[r, "f"] \arrow[d, hook] & S^m \arrow[d, hook] \\ S^{n+1} \arrow[r, dotted, "\hat{f}"] & S^{m+1} \end{tikzcd}$$

kommutoi.

Edellä esitetyn konstruktion avulla voidaan määritellä n.s. *suspensio-homomorfismi*

$$E\colon \pi_k(S^n) \to \pi_{k+1}(S^{n+1})$$

$$[f] \mapsto [\hat{f}]$$

ja voidaan osoittaa Freudenthalin suspensioteoreema: homomorfismi $E$ on isomorfismi, jos $k < 2n-1$ ja surjektio, jos $k = 2n-1$. (Teoreeman todistusta emme ehdi käsitellä, kts. esim. Hu: Homotopy Theory, Teoreema 2.1, s. 312, tai yleisempi versio, Spanier: Algebraic Topology, Teoreema 11, s. 458).
Tunnemme jo avaruuden $S^1$ kaikki homotopiaryhmät, kaikkien pallojen $S^n$ perusryhmät ja tulemme osoittamaan, että $\pi_2(S^2) \cong \mathbb{Z}$. Osoita näiden tietojen ja Freudenthalin teoreeman avulla, että
a) $\pi_k(S^n) = 0$, jos $k < n$

b) $\pi_n(S^n) \cong \mathbb{Z}$ jokaisella $n \geq 1$.

4. Tarkastellaan heikon fibraation homotopiajonon loppupäätä:

$$\pi_1(E, e_0) \xrightarrow{p_*} \pi_1(B, b_0) \xrightarrow{\partial} \pi_0(F, e_0) \xrightarrow{i_*} \pi_0(E, e_0) \xrightarrow{p_*} \pi_0(B, b_0) \longrightarrow 0,$$

missä $\pi_0$ on k.o. avaruuden polkukomponenttien joukko (jossa ei ole määritelty ryhmästruktuuria). Mitä tässä tapauksessa ovat kuvaukset $\partial$, $i_*$ ja $p_*$? Miten voitaisiin määritellä kuvauksen ydin (vihje: kantapiste)?

5. Tutki tehtävän 4 jonon eksaktisuutta kohdissa $\pi_0(F, e_0)$ ja $\pi_0(B, b_0)$.

6. Todista Huomautukseen 7.22 sisältyvä väite.