Homotopiateoria
Harjoitus 12. Ratkaisuja.

1.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p_R"'] & Y \arrow[d, "p_S"] \\ X/R \arrow[r, dotted, "\hat{f}"'] & Y/S \end{tikzcd}$$

1) Funktion $\hat{f}$ määritelmä: jos $\alpha \in X/R$, valitaan $x \in \alpha$, eli jokin $x \in X$, jolle $p_R(x) = \alpha$. Määritellään $\hat{f}(\alpha) = p_S(f(x))$, josta ehto $\hat{f} \circ p_R = p_S \circ f$ seuraa suoraan. Funktio $\hat{f}$ on hyvin määritelty: jos $x, x' \in \alpha$, on siis xRx', jolloin tehtävän oletuksen nojalla on $f(x)Sf(x')$ eli $p_S(f(x)) = p_S(f(x'))$.
2) Yksikäsitteisyys: Jos $\bar{f}$ on toinen funktio $X/R \to Y/S$, jolle $\bar{f} \circ p_R = p_S \circ f$, niin (olk. taas $\alpha \in X/R,\ x \in \alpha$)

$$\bar{f}(\alpha) = \bar{f}(p_R(x)) = (p_S \circ f)(x) = \hat{f}(\alpha).$$

Siis $\bar{f} = \hat{f}$.
3) Kts. Väisälä, Lause 9.4, s. 67. Lauseen nojalla $\hat{f}$ on jatkuva jos ja vain jos $\hat{f} \circ p_R$ on jatkuva. Tässä $\hat{f} \circ p_R = p_S \circ f$, joka on jatkuva, jos f on jatkuva. Siis $\hat{f}$ on jatkuva, jos f on jatkuva.

2. Vrt. Väisälä: 9.9–9.10, s. 68–69.
Määritellään

$$f \colon S^{n-1} \times [-1, 1] \to S^n$$

kaavalla

$$f(x, t) = (\sqrt{1 - t^2}x, t), \quad x \in S^{n-1},\ t \in [-1, 1].$$

Tällöin $\|f(x, t)\|^2 = (1 - t^2)\|x\|^2 + t^2 = 1$, koska $\|x\| = 1$, joten $f(x, t) \in S^n$. Lisäksi $f(x, t) = (0, ..., 0, -1) \Leftrightarrow t = -1$ ja $f(x, t) = (0, ..., 0, 1) \Leftrightarrow t = 1$, ja jos $x \in S^{n-1},\ t \in \,]-1, 1[$, on

$$f(x', t') = f(x, t) \Rightarrow t' = t \text{ ja } \sqrt{1 - t^2}x = \sqrt{1 - (t')^2}x' \Rightarrow x = x'.$$

Siis relaatio $R = R_f$ (Kts. V:9.9). Saadaan kaavio

$$\begin{tikzcd} S^{n-1} \times [-1,1] \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p"'] & S^n \\ S^{n-1} \times [-1,1]/R_f \arrow[ur, "f^*"'] & \end{tikzcd}$$

missä siis $S^{n-1} \times [-1,1]/R_f = S(S^{n-1})$. Nyt f on samastuskuvaus, koska $S^{n-1} \times [-1,1]$ on kompakti, S^n on Hausdorff ja f on jatkuva surjektio (f saa arvot e_{n+1} ja $-e_{n+1}$; lisäksi $f|\colon S^{n-1}\times\ ]-1,1[\ \to S^n \setminus \{e_{n+1}, -e_{n+1}\}$ on homeomorfismi käänteiskuvauksenaan $(z,t) \mapsto (z/|z|, t)$).
Siis Lauseen V:9.10 nojalla f^* on homeomorfismi.

3. Olkoon $f\colon S^n \to S^m$ jatkuva.

$$\begin{tikzcd} S^n \times [-1,1] \arrow[r, "f\times\mathrm{id}"] \arrow[d, "p_1"'] & S^m \times [-1,1] \arrow[d, "p_2"] \\ S(S^n) \arrow[r, dotted, "\bar f"'] & S(S^m) \end{tikzcd}$$

Funktion $\bar f$ olemassaolo ja jatkuvuus (ja yksikäsitteisyys) seuraa tehtävästä 1. Tässä $(x,t)R(x',t') \Rightarrow t = t' = -1$ tai $t = t' = 1 \Rightarrow (f(x),t)S(f(x'),t')$, missä R on k.o. relaatio joukossa $S^n \times [-1,1]$ ja S vastaava relaatio joukossa $S^m \times [-1,1]$.
Jos merkitään $[x,t]_n = p_1(x,t)$ ja $[y,t]_m = p_2(y,t)$, on siis

$$\bar f([x,t]_n) = [f(x),t]_m.$$

Merkitään (edellisen tehtävän homeomorfismit)

$$\varphi_n\colon S(S^n) \to S^{n+1}, \quad [x,t]_n \mapsto (\sqrt{1-t^2}x, t)$$

ja

$$\varphi_m\colon S(S^m) \to S^{m+1}, \quad [y,t]_m \mapsto (\sqrt{1-t^2}y, t).$$

Näistä saadaan

$$\hat f = \varphi_m \circ \bar f \circ \varphi_n^{-1}\colon S^{n+1} \to S(S^n) \to S(S^m) \to S^{m+1}$$

ja

$$\hat f(x,0) = \varphi_m \bar f([x,0]_n) = \varphi_m [f(x),0]_m = (f(x),0).$$

Siis jos upotetaan $S^n \to S^{n+1}$, $x \mapsto (x,0)$, niin kaavio

$$\begin{tikzcd} S^n \arrow[r, "f"] \arrow[d, hook] & S^m \arrow[d, hook] \\ S^{n+1} \arrow[r, "\hat{f}"'] & S^{m+1} \end{tikzcd}$$

kommutoi.

Lisäkysymykset:

a) Olkoot $n \geq 2$ ja $k < n$. Tällöin on $k < 2n-1$, joten

$$\pi_k(S^n) \cong \pi_{k-1}(S^{n-1}) \cong \cdots \cong \pi_1(S^{n-k+1}).$$

Nyt $n-k+1 \geq 2$, joten $\pi_1(S^{n-k+1}) = 0$ Lauseen 1.6 nojalla. Siis $\pi_k(S^n) = 0$.

b) Jos $n \geq 2$ ja $k = n$, on $k < 2n-1$, joten

$$\pi_n(S^n) \cong \cdots \cong \pi_3(S^3) \cong \pi_2(S^2) \cong \mathbb{Z}.$$

4. Kuvaus $\partial \colon \pi_1(B, b_0) \to \pi_0(F, e_0)$:

Olkoon $[\alpha] \in \pi_1(B, b_0)$, $\alpha \colon [0,1] \to B$. Palautetaan mieleen: $I^0 = \{0\}$, $J^0 = \{1\}$. Nostetaan α kuvaukseksi $\beta \colon (I, J^0) \to (E, e_0)$, siis $\beta(1) = e_0$. Lisäksi $\beta(0) \in p^{-1}(b_0) = F$. Määritellään $\partial[\alpha] =$ "pisteen $\beta(0)$ F-polkukomponentti" $\in \pi_0(F, e_0)$.

Huom. Pisteillä $\beta(0)$ ja $\beta(1) = e_0$ on tietysti sama E-polkukomponentti, mutta F-polkukomponentti voi olla eri.

Kuvaus $i_* \colon \pi_0(F, e_0) \to \pi_0(E, e_0)$:

Jos U on F:n polkukomponentti, niin U sisältyy johonkin E:n polkukomponenttiin V. Määritellään tällöin $i_*(U) = V$.

Kuvaus $p_* \colon \pi_0(E, e_0) \to \pi_0(B, b_0)$:

Jos V on E:n polkukomponentti, niin (koska p on jatkuva) $p(V)$ sisältyy johonkin B:n polkukomponenttiin W. Määritellään tällöin $p_*(V) = W$.

Funktion ydin: Aina jos (X, x_0) on kantapisteavaruus ja $f \colon Y \to X$ on funktio, voidaan määritellä $\mathrm{Ker}(f) = f^{-1}(x_0)$. Joukon $\pi_0(X, x_0)$ kantapisteeksi on luonnollista valita se polkukomponentti, joka sisältää kantapisteen x_0.

5. Kohta $\pi_0(F, e_0)$:

1) $\mathrm{Im}\partial \subset \mathrm{Ker} i_*$: Olkoon P jokin F:n polkukomponentti, joka on muotoa $P = \partial[\alpha]$ jollakin $[\alpha] \in \pi_1(B, b_0)$. On siis osoitettava, että $i_*(P) =$ pisteen e_0 E-polkukomponentti, eli että P sisältyy pisteen e_0 E-polkukomponenttiin. Funktion ∂ määritelmän mukaan P on se F:n polkukomponentti, joka sisältää pisteen $\beta(0)$, missä $\beta\colon (I, \{1\}) \to (E, e_0)$ on α:n nosto. Nyt $\beta(I)$ sisältyy pisteen e_0 E-polkukomponenttiin, erityisesti $\beta(0)$ sisältyy pisteen e_0 E-polkukomponenttiin. Koska $\beta(0) \in P$ ja P on F:n polkukomponentti, niin P sisältyy pisteen e_0 E-polkukomponenttiin.

2) $\mathrm{Ker} i_* \subset \mathrm{Im}\partial$:
Olkoon $P \in \pi_0(F, e_0)$ siten, että $i_*(P)$ on pisteen e_0 E-polkukomponentti eli että P sisältyy pisteen e_0 E-polkukomponenttiin. Olkoon $a \in P$, β polku pisteestä a pisteeseen e_0 E:ssä. Siis $\beta\colon (I^1, J^0) \to (E, e_0)$. Olkoon $\alpha = p \circ \beta\colon I^1 \to B$. Nyt $\alpha(0) = p(a) = b_0$, koska $a \in F$; $\alpha(1) = p(e_0) = b_0$. Siis $\alpha\colon (I^1, \partial I^1) \to (B, b_0)$ ja kuvauksen ∂ määritelmän nojalla $\partial[\alpha] =$ pisteen $\beta(0)$ F-polkukomponentti, eli P. Siis $P \in \mathrm{Im}\partial$.

Kohta $\pi_0(B, b_0)$:
Riittää osoittaa, että p_* on surjektio. Olkoon W B:n polkukomponentti. Koska p on surjektio, on $p(x) \in W$ jollakin $x \in E$. Merkitään V on pisteen x E-polkukomponentti. Nyt $W = p_*(V)$, mikä osoittaa surjektiivisuuden.

6. Eksaktin jonon loppupää on

$$\pi_1(F, e_0) \xrightarrow{i_*} \pi_1(E, e_0) \xrightarrow{p_*} \pi_1(B, b_0) \xrightarrow{\partial} \pi_0(F, e_0) \xrightarrow{i_*} \pi_0(E, e_0) \longrightarrow ...$$

Koska oletuksen nojalla F on diskreetti, on $\pi_1(F, e_0) = 0$ ja lisäksi voidaan samastaa $\pi_0(F, e_0)$ ja F. Koska E on polkuyhtenäinen, on $\pi_0(E, e_0) = 0$. Saadaan siis jono

$$0 \xrightarrow{i_*} \pi_1(E, e_0) \xrightarrow{p_*} \pi_1(B, b_0) \xrightarrow{\partial} F \xrightarrow{i_*} 0.$$

Eksaktisuuden nojalla p_* on injektio ja ∂ on surjektio.
Jos $f \in F$, valitaan $\bar{\alpha} \in \pi_1(B, b_0)$ siten, että $\partial(\bar{\alpha}) = f$. Osoitetaan, että $\partial^{-1}(f)$ on vasen sivuluokka $\bar{\alpha} p_* \pi_1(E, e_0)$ (mistä väite seuraa). Jos nimittäin $\partial(\bar{\alpha}') = f$, niin silmukoilla α ja α' on nostot $\beta, \beta'\colon (I, 1) \to (E, e_0)$ siten, että $\beta(0) = \beta'(0) = f$. Tällöin $\omega = \beta^{\leftarrow}\beta'$ on e_0-kantainen silmukka ja $\bar{\alpha}' = \bar{\alpha}(\overline{\alpha^{\leftarrow}\alpha'}) = \bar{\alpha} p_*(\bar{\omega})$. Kääntäen, jos α' on muotoa $\alpha' = \alpha p(\omega)$ ja β on α:n nosto siten, että $\beta(1) = e_0$, niin $\beta\omega$ on silmukan α' nosto siten, että $(\beta\omega)(1) = e_0$, joten $\partial(\bar{\alpha}') = (\beta\omega)(0) = \beta(0) = \partial(\bar{\alpha}) = f$.