Homotopiateoria
Harjoitus 11. Ratkaisuja.

1. Huom. p on surjektio, koska $p \circ \varphi = pr_1$, joka on surjektio.
Olkoon X avaruus, $f\colon X \to E$ kuvaus ja $H\colon X \times I \to B$ homotopia, jolle $H_0 = p \circ f$. On löydettävä $F\colon X \times I \to E$, jolle $F_0 = f$ ja $p \circ F = H$. Kaavio

$$\begin{tikzcd} X \times 0 \arrow[r, "\varphi^{-1} \circ f"] \arrow[d, "i"'] & B \times F \arrow[d, "pr_1"] \\ X \times I \arrow[r, "H"'] & B \end{tikzcd}$$

kommutoi, koska $pr_1 \circ \varphi^{-1} \circ f = p \circ f = H_0$. Esimerkin 7.6 kohdan 1) nojalla pr_1 on fibraatio, joten on olemassa $F'\colon X \times I \to B \times F$ siten, että $F'_0 = \varphi^{-1} \circ f$ ja $pr_1 \circ F' = H$. Nyt $F = \varphi \circ F'\colon X \times I \to E$ on haluttu nosto:

$$F_0 = \varphi \circ F'_0 = \varphi \circ \varphi^{-1} \circ f = f$$

ja

$$p \circ F = p \circ \varphi \circ F' = pr_1 \circ F' = H.$$

2. Kohta 1): Valitaan $F = \{0\}$, jolloin

$$\varphi\colon\ B \times F \xrightarrow{pr_1} B \xrightarrow{p^{-1}} E$$

on homeomorfismi, jolle $p \circ \varphi = p \circ p^{-1} \circ pr_1 = pr_1$. Väite seuraa viime viikon harjoitustehtävästä 6.

Tai:

$$\begin{tikzcd} X \times 0 \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i"'] & E \arrow[d, "p"] \\ X \times I \arrow[r, "H"'] \arrow[ur, dotted, "F"] & B \end{tikzcd}$$

Nyt $F = p^{-1} \circ H$ on haluttu nosto: $p \circ F_0 = H_0 = p \circ f$, josta saadaan $F_0 = f$, koska p on homeomorfismi. Lisäksi $p \circ F = p \circ p^{-1} \circ H = H$.

Kohta 2):

$$\begin{tikzcd}
X \times 0 \arrow[r, "f"] \arrow[dd, "i"'] & E \arrow[d, "p"] \\
 & B \arrow[d, "q"] \\
X \times I \arrow[r, "H"'] \arrow[uur, dotted, "F"] \arrow[ur, dotted, "H'"] & A
\end{tikzcd}$$

Koska q on fibraatio, löydetään ensin $H'\colon X \times I \to B$ siten, että $H'_0 = p \circ f$ ja $q \circ H' = H$. Koska p on fibraatio, löydetään sitten $F\colon X \times I \to E$ siten, että $F_0 = f$ ja $p \circ F = H'$. Nyt F on etsitty nosto: $F_0 = f$ ja $q \circ p \circ F = q \circ H' = H$.

3. Määritellään

$$f\colon \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \to S^n \times \,]0, \infty[$$

kaavalla

$$x \mapsto \left(\frac{x}{\|x\|}, \|x\| \right)$$

ja

$$\varphi\colon S^n \times \,]0, \infty[\, \to \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$$

kaavalla

$$(x, t) \mapsto tx.$$

Nyt f ja φ ovat jatkuvia ja toistensa käänteiskuvauksia, siis homeomorfismeja. Lisäksi

$$r \circ \varphi(x, t) = r(tx) = \frac{tx}{t\|x\|} = \frac{tx}{t \cdot 1} = x = pr_1(x, t).$$

Väite seuraa nyt Esimerkin 7.6 kohdasta 2).

4. a) Olkoon $r\colon I^2 \to E$ "pystysuora retraktio" ja $i\colon E \to I^2$ inkluusio. Tarkastellaan kaaviota

$$\begin{tikzcd}
X \times 0 \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i"'] & E \arrow[d, "p"] \\
X \times I \arrow[r, "H"'] \arrow[ur, dotted, "F"] & I
\end{tikzcd}$$

johon on siis löydettävä funktio F.

Tarkastellaan ensin kaaviota

$$\begin{tikzcd} X \times 0 \arrow[r, "i \circ f"] \arrow[d, "i"'] & I^2 \arrow[d, "pr_1"] \\ X \times I \arrow[r, "H"'] \arrow[ur, dotted, "\bar{F}"] & I \end{tikzcd}$$

Kaavio kommutoi, koska $pr_1 \circ (i \circ f) = (pr_1 \circ i) \circ f = p \circ f$. Koska pr_1 on fibraatio Esimerkin 7.6 kohdan 1) nojalla, tähän kaavioon löydetään funktio $\bar{F}$.

Nyt $F = r \circ \bar{F}: X \times I \to I^2 \to E$ on alkuperäisen ongelman ratkaisu:

$$F(x,0) = r \circ \bar{F}(x,0) = r \circ i \circ f(x,0) = f(x,0)$$

ja

$$p \circ F(x,t) = p \circ r \circ \bar{F}(x,t) = pr_1 \circ \bar{F}(x,t) = H(x,t).$$

Nostolle F voi löytää seuraavanlaisen kaavan (Ilmari Kangasniemi):

$$F(x,t) = (H(x,t), \max\{0, f_1(x) + f_2(x) - H(x,t)\}).$$

b) Kyseessä ei ole säiekimppu, koska tällöin kaikkien säikeiden (eli yhden pisteen alkukuvien) tulisi olla homeomorfisia keskenään, mutta esim. $p^{-1}(0) = \{0\} \times [0,1]$ ja $p^{-1}(1) = \{(1,0)\}$.

5. Koska X on kutistuva, on $\mathrm{id}_X \simeq c$ (c vakiofunktio), joten $f = f \circ \mathrm{id}_X \simeq f \circ c \equiv b_0 \in B$. Olkoon H homotopia $c_{b_0} \simeq f$. Valitaan $e_0 \in p^{-1}(b_0)$. Tarkastellaan kaaviota

$$\begin{tikzcd} X \times 0 \arrow[r, "c_{e_0}"] \arrow[d, "i"'] & E \arrow[d, "p"] \\ X \times I \arrow[r, "H"'] \arrow[ur, dotted, "F"] & B \end{tikzcd}$$

joka kommutoi, koska $H(x,0) = b_0$ ja $p(c_{e_0}(x,0)) = p(e_0) = b_0$. Koska p on fibraatio, on olemassa F siten, että koko kaavio kommutoi. Määritellään $\tilde{f} = F_1$, jolloin $\tilde{f}$ on haluttu nosto: $p \circ \tilde{f}(x) = p \circ F(x,1) = H(x,1) = f(x)$.

6. Olkoon $y \in Y$ ja V pisteen y peiteympäristö. Edellisen tehtävän nojalla on olemassa bijektio $\varphi: p^{-1}\{y_0\} \to p^{-1}\{y\}$, jolloin $\mathrm{id} \times \varphi: V \times p^{-1}\{y_0\} \to V \times p^{-1}\{y\}$ on homeomorfismi. Oletuksen nojalla on $p^{-1}V = \cup_{j \in J} U_j$, missä

joukot U_j ovat erillisiä ja avoimia. Nyt jokainen joukoista U_j sisältää täsmälleen yhden pisteen säikeestä $p^{-1}\{y\}$, joten voidaan kirjoittaa

$$p^{-1}V = \bigcup_{x \in p^{-1}\{y\}} U_x.$$

Merkitään jokaisella $x \in p^{-1}\{y\}$ kuvauksen p rajoittumaa $p_x\colon U_x \to V$, joka on homeomorfismi. Kuvaukset

$$V \times p^{-1}\{y\} \to \bigcup_{x \in p^{-1}\{y\}} U_x, \quad (v, x) \mapsto p_x^{-1}(v)$$

ja

$$\bigcup_{x \in p^{-1}\{y\}} U_x \to V \times p^{-1}\{y\}, \quad z \mapsto (p(z), x), \text{ kun } z \in U_x,$$

ovat hyvin määriteltyjä ja jatkuvia. Lisäksi ne ovat toistensa käänteiskuvauksia, joten ne ovat homeomorfismeja. Siis saadaan homeomorfismi

$$\psi\colon V \times p^{-1}\{y_0\} \xrightarrow{\mathrm{id}\times\varphi} V \times p^{-1}\{y\} \xrightarrow{\approx} \textstyle\bigcup_{x \in p^{-1}\{y\}} U_x = p^{-1}V$$

ja $p \circ \psi = pr_1$.
Siis peiteympäristöt muodostavat säiekimpun määritelmässä vaaditun peitteen.