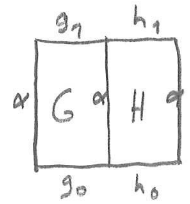
Homotopiateoria
Harjoitus 10. Ratkaisuja.

1. Lauseen 6.16 kohdasta 3) seuraa, että $h_{\bar\alpha}$ on bijektio. Riittää siis osoittaa, että se on homomorfismi. Samastuksessa

$$\pi_n(X, x_0) \to [I^n, \partial I^n; X, x_0], \quad [f] \mapsto [f \circ \pi \circ h],$$

vastaa α-homotopiaa $f_0 \simeq_\alpha f_1$ kuvausten $g_0, g_1 \colon I^n \to X$ (missä $g_0(\partial I^n) = x_0$, $g_1(\partial I^n) = x_1$) homotopia $G \colon I^n \times I \to X$ siten, että $G(x,t) = \alpha(t)$ jokaisella $x \in \partial I^n$.
Olkoot $h_0, h_1 \colon I^n \to X$ siten, että $h_i(\partial I^n) = x_i$ ja $H \colon I^n \times I \to X$ homotopia $h_0 \simeq h_1$
siten, että $H(x,t) = \alpha(t)$ jokaisella $x \in \partial I^n$.
Tällöin homotopian $K \colon g_0 h_0 \simeq g_1 h_1$, jolle $K(x,t) = \alpha(t)$ jokaisella $x \in \partial I^n$, antaa kaava

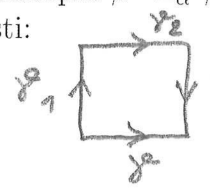
$$K(t_1, ..., t_n, t) = \begin{cases} G(2t_1, t_2, ..., t_n, t), & \text{jos } 0 \le t_1 \le \frac{1}{2} \\ H(2t_1 - 1, t_2, ..., t_n, t), & \text{jos } \frac{1}{2} \le t_1 \le 1. \end{cases}$$

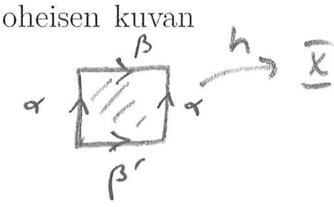


Siis

$$h_{\bar\alpha}([g_1][h_1]) = h_{\bar\alpha}[g_1 h_1] = [g_0 h_0] = [g_0][h_0] = h_{\bar\alpha}[g_1] h_{\bar\alpha}[h_1].$$

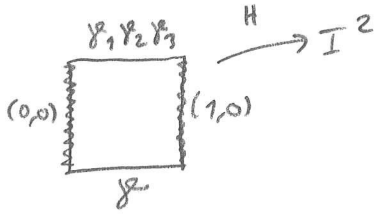
2. Olkoon $\beta \colon I \to X$ x_1-kantainen silmukka ja α polku pisteestä x_0 pisteeseen x_1. Olkoon lisäksi β' x_0-kantainen silmukka siten, että $\beta' \simeq_\alpha \beta$, ja $h \colon I \times I \to X$ α-homotopia $\beta' \simeq_\alpha \beta$. Olkoot $\gamma, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ polkuja I^2:ssa oheisen kuvan mukaisesti:





Koska I^2 on konveksi, on olemassa polkuhomotopia

$$H \colon I \times I \to I^2, \ \gamma \sim \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3.$$



Määritellään sitten

$$F \colon I \times I \to X$$
$$F(s,t) = h(H(s,t)),$$

jolloin F on polkuhomotopia $\beta' \sim \alpha\beta\alpha^{\leftarrow}$:

- $F(s,0) = h(H(s,0)) = h(\gamma(s)) = \beta'(s)$
- $F(s,1) = h(H(s,1)) = h(\gamma_1\gamma_2\gamma_3(s)) = \alpha\beta\alpha^{\leftarrow}(s)$
- $F(0,t) = h(H(0,t)) = h(0,0) = \beta'(0) = x_0$
- $F(1,t) = h(H(1,t)) = h(1,0) = \beta'(1) = x_0$.

Siis $\bar{\alpha}\bar{\beta}\overline{\alpha^{\leftarrow}} = \bar{\beta}' = h_{\bar{\alpha}}(\bar{\beta})$.

Seuraava kaava antaa α-homotopian $\alpha\beta\alpha^{\leftarrow} \simeq_{\alpha} \beta$ (Kristian Setälä):

$$H(x,t) = \begin{cases} \alpha(3x+t), & \text{jos } 0 \leq x \leq (1-t)/3 \\ \beta\left(\frac{x-(1-t)/3}{1-2(1-t)/3}\right), & \text{jos } (1-t)/3 \leq x \leq 1-(1-t)/3 \\ \alpha^{\leftarrow}(3(x-1+(1-t)/3)), & \text{jos } 1-(1-t)/3 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

3. a) Olkoon $x \in X$. Lauseen 6.20 nojalla riittää tutkia kuvauksen $j_x\colon \pi_n(X,x) \to [S^n, X]$ bijektiivisyyttä.
Olkoon α polku pisteestä x_0 pisteeseen x. Nyt $h_{\bar{\alpha}}\colon \pi_n(X,x) \to \pi_n(X,x_0)$ on bijektio ja oletuksen nojalla $j\colon \pi_n(X,x_0) \to [S^n, X]$ on bijektio, joten riittää osoittaa, että $j_x = j \circ h_{\bar{\alpha}}$.
Olkoon $[f]_x \in \pi_n(X,x)$, jolloin $j_x([f]_x) = [f] \in [S^n, X]$. Olkoon $[f']_{x_0} = h_{\bar{\alpha}}[f]_x$ eli $f' \simeq_{\alpha} f$, erityisesti $[f'] = [f]$ joukossa $[S^n, X]$. Siis

$$j(h_{\bar{\alpha}}[f]_x) = j([f']_{x_0}) = [f'] = [f] \in [S^n, X].$$

b) Palautetaan mieleen, että $h_{\bar{\alpha}}\colon \pi_1(X,x_0) \to \pi_1(X,x_0)$ on luokalla $\bar{\alpha}$ konjugointi $\bar{\beta} \mapsto \bar{\alpha}\bar{\beta}\bar{\alpha}^{-1}$. Siis: X on 1-yksinkertainen

$$\Leftrightarrow h_{\bar{\alpha}}(\bar{\beta}) = \bar{\beta} \text{ kaikilla } \bar{\alpha}, \bar{\beta} \in \pi_1(X,x_0)$$

$$\Leftrightarrow \bar{\alpha}\bar{\beta}\bar{\alpha}^{-1} = \bar{\beta} \text{ kaikilla } \bar{\alpha}, \bar{\beta} \in \pi_1(X,x_0)$$

$$\Leftrightarrow \bar{\alpha}\bar{\beta} = \bar{\beta}\bar{\alpha} \text{ kaikilla } \bar{\alpha}, \bar{\beta} \in \pi_1(X,x_0)$$

$$\Leftrightarrow \pi_1(X,x_0) \text{ on Abelin ryhmä.}$$

4. Olkoon $g\colon Y \to X$ kuvauksen f homotopiainverssi, merkitään $y_0 = f(x_0)$ ja $x_1 = g(y_0)$. Valitaan homotopia $F\colon g \circ f \simeq \mathrm{id}_X$ ja merkitään $\alpha\colon I \to X$, $\alpha(t) = F(x_0, t)$. Siis $\alpha(0) = x_1$ ja $\alpha(1) = x_0$.

Jokaiselle kuvaukselle $k\colon (S^n, p_0) \to (X, x_0)$ on

$$S^n \times I \xrightarrow{k \times \mathrm{id}} X \times I \xrightarrow{F} X$$

α-homotopia $g \circ f \circ k \simeq_\alpha k$. Siten $g_*(f_*[k]) = [g \circ f \circ k] = h_{\bar{\alpha}}[k]$ eli yhdistetty homomorfismi

$$\pi_n(X, x_0) \xrightarrow{f_*} \pi_n(Y, y_0) \xrightarrow{g_*} \pi_n(X, x_1)$$

on isomorfismi $h_{\bar{\alpha}}$. Erityisesti f_* on injektio ja g_* surjektio. Vaihtamalla kuvausten f ja g roolit nähdään, että g_* on myös injektio, jolloin g_* ja siis myös f_* on bijektio (vrt. harj. 3, teht. 2).

5. Nosto $\hat{i}\colon I \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ on muotoa $\hat{i} = (f_1, f_2)$.
Osoitetaan, että $\hat{i}$ on halutunlainen nosto jos ja vain jos $f_1(t) = t$ ja f_2 on mikä tahansa jatkuva funktio $I \to \mathbb{R}$, jolle $f(0) = 0$.

"$\Rightarrow$": Jos $\hat{i} = (f_1, f_2)$ on nosto, niin välttämättä $f_1(t) = pr_1(\hat{i}(t)) = i(t) = t$. Funktion f_2 on oltava jatkuva ja ehdosta $\hat{i}(0) = (f_1(0), f_2(0)) = (0, 0)$ saadaan $f(0) = 0$.

"$\Leftarrow$": Näillä oletuksilla $\hat{i} = (f_1, f_2)$ on jatkuva, $\hat{i}(0) = (0, 0)$, ja $\hat{i}$ on nosto, sillä

$$pr_1(\hat{i}(t)) = pr_1(f_1(t), f_2(t)) = f_1(t) = t = i(t).$$

Jos avaruuden $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ tilalla on $\mathbb{R} \times \mathbb{Z}$, on $f_2\colon I \to \mathbb{Z}$ välttämättä vakiofunktio $f_2 \equiv 0$, joten nosto $\hat{i}$ on $t \mapsto (t, 0)$, siis nosto on yksikäsitteinen. Huom. Tässä pr_1 on peitekuvaus.

6. Olkoot $y_0, y_1 \in Y$. Konstruoidaan bijektio

$$\varphi\colon p^{-1}\{y_0\} \to p^{-1}\{y_1\},$$

mistä väite seuraa. Olkoon α polku Y:ssä pisteestä y_0 pisteeseen y_1 (Y polkuyhtenäinen). Olkoon $x_0 \in p^{-1}\{y_0\}$. Polulla α on yksikäsitteinen nosto $\tilde{\alpha}\colon I \to X$, jolle $\tilde{\alpha}(0) = x_0$ (V:24.5). Määritellään

$$\varphi(x_0) = \tilde{\alpha}(1) \in p^{-1}\{y_1\}.$$

Vastaavasti määritellään $\psi\colon p^{-1}\{y_1\} \to p^{-1}\{y_0\}$ käyttämällä polun α käänteispolkua: jos $x_1 \in p^{-1}\{y_1\}$, on polulla $\alpha^{\leftarrow}$ yksikäsitteinen nosto $\widetilde{\alpha^{\leftarrow}}$, jolle $\widetilde{\alpha^{\leftarrow}}(0) = x_1$. Määritellään

$$\psi(x_1) = \widetilde{\alpha^{\leftarrow}}(1) \in p^{-1}\{y_0\}.$$

Osoitetaan, että $\psi \circ \varphi = \mathrm{id}$: Jos $x_0 \in p^{-1}\{y_0\}$, $\tilde{\alpha}\colon I \to X$ siten, että $\tilde{\alpha}(0) = x_0$, $x_1 = \tilde{\alpha}(1) \in p^{-1}\{y_1\}$, ja $\widetilde{\alpha^{\leftarrow}}$ siten, että $\widetilde{\alpha^{\leftarrow}}(0) = x_1$, niin

$$\widetilde{\alpha^{\leftarrow}} = \tilde{\alpha}^{\leftarrow},$$

joten $\widetilde{\alpha^{\leftarrow}}(1) = \tilde{\alpha}^{\leftarrow}(1) = \tilde{\alpha}(0) = x_0$. Siis $\psi \circ \varphi(x_0) = x_0$, joten $\psi \circ \varphi = \mathrm{id}$. Vastaavasti $\varphi \circ \psi = \mathrm{id}$, joten φ ja ψ ovat bijektioita.