Liite A.

Parakompaktisuus

Määritellään ensin muutamia peitteisiin liittyviä käsitteitä:

Määr. A.1. Olk. X avaruus. Perhe $(A_j)_{j\in J}$ X:n osajoukkoja on <u>lokaalisti äärellinen</u>, jos $\forall x\in X$ $\exists$ ymp. U_x s.e. $U_x \cap A_j \neq \emptyset$ vain äärellisen monella indeksillä j.
Perhe $(A_j)_{j\in J}$ on <u>pisteäärellinen</u> (point-finite), jos $\forall x\in X$: $x\in A_j$ vain äärell. monella indeksillä j.

Selvästi lokaalisti äärell. perhe on pisteäärellinen.
Esim. • perhe $\{[-n,n] \mid n\in\mathbb{N}\}$ ei ole pisteäärellinen.
• perhe $\{\{x\} \mid x\in\mathbb{R}\}$ on pisteäärellinen, mutta ei lok. äärellinen.
• perhe $\{[n,\infty[\mid n\in\mathbb{N}\}$ on lokaalisti äärellinen.

Kuten Väisälän kirjassa, käsitellään peitteitä indeksöityinä, t.s. avaruuden X <u>peite</u> on sellainen perhe $(A_j)_{j\in J}$, että $X = \bigcup_{j\in J} A_j$. Peite on <u>avoin</u>, jos sen jokainen jäsen A_j on avoin.

Jatkuvan funktion $g: X \to \mathbb{R}$ <u>kantaja</u> (engl. support) on joukko

$$spt(g) = \overline{\{x\in X \mid g(x) \neq 0\}}.$$

Nollafunktion kantaja on $\emptyset$.

Olk. $(g_j)_{j\in J}$ perhe jatkuvia funktioita $g_j: X\to\mathbb{R}$ s.e. perhe $(spt(g_j))_{j\in J}$ on lokaalisti äärellinen.
Erityisesti joukko $K(x) = \{j\in J \mid g_j(x)\neq 0\}$ on äärellinen $\forall x\in X$.
Asettamalla

$$g(x) = \sum_{j\in K(x)} g_j(x)$$

saadaan funktio $g: X\to\mathbb{R}$, merk. $g = \sum_{j\in J} g_j$.

Jos $x\in X$, niin x:llä on ympäristö U, jossa funktio g on äärellinen summa jatkuvista funktioista; siis g on jatkuva U:ssa.
Siis g on jatkuva jokaisen pisteen eräässä ympäristössä, joten g on jatkuva koko X:ssä.

11.11.13 $\longrightarrow$

(engl. partition of unity)

Määr. A.2. Perhe $(g_j)_{j\in J}$ jatkuvia funktioita $g_j : \overline{X} \to I$ on <u>ykkösen ositus</u>, jos

1) perhe $(spt(g_j))_{j\in J}$ on lokaalisti äärellinen
2) $\sum_{j\in J} g_j(x) = 1 \quad \forall x \in \overline{X}$.

Koska jokaisessa pisteessä jokin $g_j(x) > 0$, niin $(spt(g_j))_{j\in J}$ on $\overline{X}$:n lokaalisti äärellinen peite.

Esim. jos $\overline{X} = [0,1]$, funktiot $x \mapsto x$ ja $x \mapsto 1-x$ muodostavat ykkösen osituksen.
(Esim. kuva)
Olk. $(U_j)_{j\in J}$ avaruuden $\overline{X}$ avoin peite. Sanomme, että ykkösen ositus $(g_j)_{j\in J}$ on peitteeseen (U_j) <u>sopiva</u>, jos $spt(g_j) \subset U_j \quad \forall j \in J$.
(engl. partition of unity subordinated to the covering $(U_j)_{j\in J}$)

Lause A.3. Jos $(A_j)_{j\in J}$ on lokaalisti äärellinen perhe suljettuja joukkoja, niin yhdiste $\bigcup\{A_j \mid j \in J\}$ on suljettu.

Tod. HT.

$\square$

Lemma A.4. Olk. $(\overline{X}, d)$ metrinen avaruus, jonka läpimitta $d(\overline{X}) \leq 1$, ja olkoon $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $\overline{X}$:n avoin peite. Tällöin on olemassa sellainen ykkösen ositus $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$, että $spt(g_n) \subset \overline{U_n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Tod. Jos $U_k = \overline{X}$ jollakin $k \in \mathbb{N}$, valitaan $g_k \equiv 1$, $g_n \equiv 0, n \neq k$.
Ol. nyt, että $U_n \neq \overline{X} \quad \forall n \in \mathbb{N}$.
Merk. $V_1 = \emptyset$, $V_n = \bigcup_{k<n} U_k$, $n \geq 2$.
Määr. $f_n : \overline{X} \to \mathbb{R}$

$$f_n(x) = d(x, \overline{X} \setminus U_n) - n \cdot d(x, \overline{X} \setminus V_n), \quad n \in \mathbb{N}$$

ja $h_n : \overline{X} \to \mathbb{R}$

$$h_n(x) = \max\{f_n(x), 0\}.$$

Selvästi f_n ja h_n ovat jatkuvia ja $spt(h_n) \subset \overline{U_n}$
(jos $x \notin U_n$, on $d(x, \overline{X} \setminus U_n) = 0$ ja niin $f_n(x) \leq 0$ ja $h_n(x) = 0$).

A3

Osoitetaan, että perhe $(spt(h_n))$ on lokaalisti äärellinen:

olk. $y \in X$. Val. $k \in \mathbb{N}$ s.e. $y \in U_k$ ja luku $r > 0$, jolla $B(y, 2r) \subset U_k$. Riittää osoittaa, että kuula $W = B(y,r)$ ei kohtaa joukkoja $spt(h_n)$, kun $n > \frac{1}{r}$ ja $n > k$.

Olk. $x \in W$. Koska $U_k \subset V_n$ $(n > k)$, niin

$$(*) \quad d(x, X \setminus V_n) \geq d(x, X \setminus U_k) \geq \underbrace{d(y, X \setminus U_k)}_{\geq 2r} - \underbrace{d(x,y)}_{< r} > r.$$

Koska $d(X) \leq 1$, saadaan

$$f_n(x) \underset{(*)}{<} 1 - nr \underset{n > \frac{1}{r}}{<} 0.$$

Siis $h_n(x) = 0$ $\forall x \in W$, joten $W \cap spt(h_n) = \emptyset$.

Voidaan siis määritellä jatkuva funktio $h = \sum_{n \in \mathbb{N}} h_n : X \to [0, \infty[$.

Lisäksi $h(x) > 0$ $\forall x \in X$, sillä jos n on pienin luku, jolla $x \in U_n$, niin $x \notin V_n$, joten $f_n(x) = d(x, X \setminus U_n) > 0$ ja siis $h(x) \geq h_n(x) > 0$.

Funktiot $g_n : g_n(x) = \dfrac{h_n(x)}{h(x)}$ muodostavat vaaditun ykkösen osituksen $\left(\sum g_n(x) = \dfrac{\sum h_n(x)}{h(x)} = 1 \right)$.

$\square$

14.10.92

Lause A.5. Metrisoituvassa N_2-avaruudessa X on jokaista avointa peitettä kohti olemassa siihen sopiva ykkösen ositus.

Tod. Olk. $(U_j)_{j \in J}$ X:n avoin peite. Topologia I: 10.6 $\Rightarrow$ $\exists$ X:n metriikka, joka määrää X:n topologian ja jossa $d(X) \leq 1$.

Kullakin $x \in X$ val. $i(x) \in J$, jolla $x \in U_{i(x)}$ ja luku $r(x) > 0$, jolla $B(x, 2r(x)) \subset U_{i(x)}$. Kuulat $B(x, r(x))$, $x \in X$, muodostavat X:n avoimen peitteen. N_2-avaruus on aina Lindelöf (Väisälä: Lause 12.14), joten tällä peitteellä on numeroituva osapeite, t.s. void. valita X:n jono $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ s.e. kuulat $B(x_n, r(x_n))$, $n \in \mathbb{N}$, peittävät X:n.

Lemman A.4. nojalla $\exists$ ykkösen ositus $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$, jolla $spt(g_n) \subset \overline{B}(x_n, r(x_n)) \subset U_{i(x_n)}$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

Kun $j \in J$, merk. $K(j) = \{n \in \mathbb{N} \mid i(x_n) = j\}$ ja määr.

$$h_j : X \to [0,1]$$

$$(*) \qquad h_j(x) = \sum_{n \in K(j)} g_n(x).$$

Jos $K(j) = \emptyset$, määr. $h_j \equiv 0$.
Huom. koska perhe $(spt(g_n))$ on lok. äärellinen, niin (kiinteällä x:n arvolla) summassa $(*)$ on vain äärellisen monta nollasta eroavaa termiä.

$$\left.\begin{array}{l} \text{Funktiot } h_j \text{ ovat jatkuvia} \\ spt(h_j) \subset U_j \quad \forall j \in J \\ \text{Perhe } (h_j) \text{ on haettu ykkösen ositus.} \end{array}\right\} HT$$

$\square$

Määr. A.6. Olk. $\{A_\alpha \mid \alpha \in \mathcal{A}\}$ ja $\{B_\beta \mid \beta \in \mathcal{B}\}$ kaksi avaruuden X peitettä. Sanomme, että peite $\{B_\beta\}$ on peitteen $\{A_\alpha\}$ tihennys (engl. refinement)

$$\forall \beta \in \mathcal{B}\ \exists \alpha \in \mathcal{A} \text{ s.e. } B_\beta \subset A_\alpha. \quad \text{Merk. } \{B_\beta\} < \{A_\alpha\}$$

Tihennys on tarkka (precise), jos

$$\mathcal{A} = \mathcal{B} \text{ ja } B_\alpha \subset A_\alpha \quad \forall \alpha \in \mathcal{A}.$$

Määr. A.7. Hausdorffin avaruus X on parakompakti, jos jokaisella X:n avoimella peitteellä on avoin lokaalisti äärellinen tihennys.

Lause A.8. Olk. $\{A_\alpha \mid \alpha \in \mathcal{A}\}$ ja $\{B_\beta \mid \beta \in \mathcal{B}\}$ avaruuden X peitteitä. Tällöin

1) $\{A_\alpha \cap B_\beta \mid (\alpha, \beta) \in \mathcal{A} \times \mathcal{B}\}$ on X:n peite, joka on sekä $\{A_\alpha\}$:n että $\{B_\beta\}$:n tihennys.
Jos $\{A_\alpha\}$ ja $\{B_\beta\}$ ovat lokaalisti äärellisiä (vast. pisteäärellisiä) niin $\{A_\alpha \cap B_\beta\}$ on lok. äärellinen (vast. pisteäärellinen).

2) Jokainen peitteiden $\{A_\alpha\}$ ja $\{B_\beta\}$ yhteinen tihennys (siis peite $\{C_\gamma\}$, jolle $\{C_\gamma\} < \{A_\alpha\}$ ja $\{C_\gamma\} < \{B_\beta\}$) on myös peitteen $\{A_\alpha \cap B_\beta\}$ tihennys.

Tod. HT. $\square$

A5

Lause A.9. Jos peitteellä $\{A_\alpha \mid \alpha \in \mathcal{A}\}$ on pisteäärellinen (vast. lok. äärellinen) tihennys $\{B_\beta \mid \beta \in \mathcal{B}\}$, niin sillä on myös tarkka pisteäärellinen (vast. lok. äärellinen) tihennys $\{C_\alpha \mid \alpha \in \mathcal{A}\}$.
Lisäksi, jos jokainen B_β on avoin, niin myös joukot C_α voidaan valita avoimiksi.

Tod. Määr. funktio $\varphi: \mathcal{B} \to \mathcal{A}$, joka jokaiseen $\beta \in \mathcal{B}$ liittää jonkin $\alpha \in \mathcal{A}$, jolle $B_\beta \subset A_\alpha$.
Jokaiselle α, olkoon $C_\alpha = \bigcup \{B_\beta \mid \varphi(\beta) = \alpha\}$; jotkin C_α voivat olla tyhjiä. Selvästi $C_\alpha \subset A_\alpha$ $\forall \alpha$, ja myös $\{C_\alpha \mid \alpha \in \mathcal{A}\}$ on peite, koska jokainen B_β sisältyy johonkin C_α:aan. Samoin on selvää, että C_α on avoin, jos joukot B_β ovat avoimia.
Jos $\{B_\beta\}$ on pisteäärellinen, niin jokainen $x \in X$ kuuluu vain äärell. moneen B_β ja siis korkeintaan yhtä moneen C_α.
Vastaavasti, jos $\{B_\beta\}$ on lok. äärellinen, niin jokaisella $x \in X$ on ympäristö U, joka kohtaa vain äärellisen monta joukoista B_β. Tämä ympäristö kohtaa siis korkeintaan näin monta joukoista C_α. $\square$

Teoreema A.10. Jokainen parakompakti avaruus X on normaali.

Tod. Os. ensin, että X on säännöllinen. Olk. $x \in X$, $A \in X$, $x \notin A$.
Koska X on Hausdorff, on jokaisella $a \in A$ ympäristö U_a s.e. $x \notin \overline{U_a}$. Koska $\{U_a \mid a \in A\} \cup \{X \setminus A\}$ on X:n avoin peite, on sillä parakompaktisuuden ja Lauseen A.9 nojalla tarkka avoin lok. äärellinen tihennys $\{V_a \mid a \in A\} \cup \{G\}$.
Tällöin $W = \bigcup\{V_a \mid a \in A\}$ on avoin ja sisältää A:n. Lisäksi, koska $\{V_a\}$ on lok. äärellinen, on Lauseen A.3 nojalla

"$\supset$" ok.
"$\subset$" A.3

$\overline{W} = \bigcup\{\overline{V_a} \mid a \in A\}$. Koska $x \notin \overline{U_a} \supset \overline{V_a}$ $\forall a \in A$, on siis $x \notin \overline{W}$. Siis $X \setminus \overline{W}$ ja W ovat x:n ja A:n erill. ympäristöt, mikä osoittaa säännöllisyyden.
Normaalisuus: olk. $A, B \in X$, $A \cap B = \emptyset$. Säännöllisyydestä seuraa, että $\forall a \in A$ $\exists$ ymp. U_a s.e. $\overline{U_a} \cap B = \emptyset$. Vastaava päättely kuin edellä (missä ~~y~~ x korvataan B:llä) antaa A:lle ja B:lle erilliset ympäristöt. $\square$

18.11.13 $\longrightarrow$

A6

Teoreema A.11. Olk. X parakompakti. Tällöin jokaisella X:n avoimella peitteellä $\{U_\alpha \mid \alpha \in A\}$ on olemassa tähän peitteeseen sopiva ykkösen ositus.

Tod. Parakompaktisuuden nojalla on olemassa peitteen $\{U_\alpha\}$ tarkka avoin lok. äärellinen tihennys $\{U'_\alpha\}_{\alpha\in A}$. Voidaan osoittaa (kts. [Dugundji: Topology, VII 6.1., s. 152], palataan todistukseen myöhemmin, jos ehditään), että normaalisuudesta seuraa: on olemassa lok. äärellinen avoin peite $\{V_\alpha\}$ s.e. $\overline{V_\alpha} \subset U'_\alpha$.
Sama uudelleen: saadaan lok. äärellinen avoin peite $\{W_\alpha\}$ s.e. $\overline{W_\alpha} \subset V_\alpha$.
Koska X on normaali, löydetään Urysonin lemman avulla jokaiselle $\alpha \in A$ jatkuva funktio $g_\alpha : X \to I$ s.e. $g_\alpha | \overline{W_\alpha} \equiv 1$ ja $g_\alpha | (X \setminus V_\alpha) \equiv 0$ (jos $V_\alpha = \emptyset$, määr. $g_\alpha \equiv 0$).
Siis $\operatorname{spt}(g_\alpha) \subset \overline{V_\alpha} \subset U_\alpha \ \forall \alpha \in A$.
Koska $\{\overline{W_\alpha}\}$ on lok. äärellinen peite, niin jokaisella $x \in X$ vähintään 1 mutta vain äärellisen moni funktioista g_α on $\neq 0$.
Siis $\sum_\alpha g_\alpha$ on hyvin määr. funktio $X \to \mathbb{R}$ ja $\sum g_\alpha(x) \neq 0 \ \forall x$.
Jatkuvuus: jokaisella pisteellä on ympäristö, jossa vain äärellisen moni funktioista g_α ei ole $\equiv 0$; siis $\sum g_\alpha$ on jatkuva jokaisen pisteen eräässä ympäristössä, siis koko X:ssä.
Haluttu ykkösen ositus on perhe $\{h_\alpha \mid \alpha \in A\}$, missä

$$h_\alpha(x) = \frac{g_\alpha(x)}{\sum_\alpha g_\alpha(x)} .$$

$\square$

Sovellus A.12. Jos $\{h_\alpha \mid \alpha \in A\}$ on ykkösen ositus avaruudella X ja $\{\varphi_\alpha \mid \alpha \in A\}$ on perhe jatkuvia funktioita $\varphi_\alpha : X \to \mathbb{R}$, niin funktio $\varphi : X \to \mathbb{R}$, $\varphi(x) = \sum_\alpha \varphi_\alpha(x) h_\alpha(x)$, on jatkuva.

Itse asiassa funktioiden φ_α ei tarvitse olla määriteltyjä koko X:ssä: Jos $\{h_\alpha \mid \alpha \in A\}$ on avoimeen peitteeseen $\{U_\alpha \mid \alpha \in A\}$ sopiva ykkösen ositus ja $\{\varphi_\alpha \mid \alpha \in A\}$ on perhe jatkuvia funktioita $\varphi_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{R}$, määritellään funktiot $f_\alpha : X \to \mathbb{R}$,

$$f_\alpha(x) = \begin{cases} \varphi_\alpha(x), & x \in U_\alpha \\ 0, & x \notin U_\alpha . \end{cases}$$

Funktiot f_α eivät siis välttämättä ole jatkuvia.
Funktio $\varphi : X \to \mathbb{R}$, $\varphi(x) = \sum_\alpha f_\alpha(x) h_\alpha(x)$, kuitenkin on jatkuva (HT).

$\square$

A

A7

Teoreema 13. Oletetaan, että avaruudella X on ominaisuus: jokaiselle avoimelle peitteelle $\{U_\alpha\}$ löytyy siihen sopiva ykkösen ositus. Tällöin X on parakompakti.

Tod. ~~Oleellisesti sama kuin Harj. 10/ Teht. 5~~.
HT □

Muita tuloksia (viittaukset Dugundjin kirjaan):

- Jos X on parakompakti ja $f : X \to Y$ on jatkuva suljettu surjektio, niin Y on parakompakti (s. 165)
- Jos X on parakompakti ja $A \subseteq X$, niin A on parakompakti. (HT) (jokainen aliavaruus ei välttämättä ole)
- X_α, $\alpha \in A$ parakompakteja $\overset{\not\Rightarrow}{\Leftarrow}$ $\prod X_\alpha$ parakompakti (s. 165)
- Jokainen metristyvä avaruus on parakompakti (s. 186).