

Nämä ovat FYMM Ib -kurssin viimeiset laskarit. Ensi viikolla lisätään kurssin kotisivuille yhteenveto koalueesta, sekä lista kokeeseen osallistumista varten riittävästi laskaripisteitä keränneistä.

*Huom:* Koetta edeltävällä viikolla järjestetään laskaripajoja, joihin voi mennä valmistautumaan kokeeseen. **Pe 11.12. laskaripajoja joudutaan valitettavasti perumaan tai siirtämään: uudet ajat ilmoitetaan kurssin kotisivuilla ensi viikon alkuun mennessä.**

## Tehtävät 1

Laske funktion

$$f(t) = \theta(t-2) \cosh(2t) + t^{3/2}$$

Laplaceen muunnos, missä  $\theta(t)$  on Heavisiden porraskäyrä (kutsutaan myös askelfunktioksi),

$$\theta(x) = \begin{cases} 1, & \text{kun } x > 0, \\ 0, & \text{kun } x < 0. \end{cases}$$

(Tehtävän ratkaisuun ei vaikuta, miten  $\theta(0)$  määritellään: voit halutessasi miettiä miksi.)

## Tehtävä 2

Funktion  $F(s) = e^{-s}/(s-1)$  Laplaceen käänteismuunnos määritellään kaavalla

$$f(t) = \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{ts} F(s) \frac{ds}{2\pi i},$$

jossa  $\sigma > 1$ . Laske  $f(t)$ , kun  $t \neq 1$ , soveltaen residylausetta ja Jordanin lemmaa. Voit halutessasi laskea myös arvon  $f(1)$ , jonka löytää suoraan integraalifunktiota etsimällä.

(*Vihje:* Kun  $R > 0$  on riittävän suuri, voi joko polun  $s = \gamma(\phi) = \sigma - iR e^{i\phi}$ ,  $\phi \in [0, \pi]$ , tai polun  $s = \gamma(\phi) = \sigma - iR e^{-i\phi}$ ,  $\phi \in [0, \pi]$ , yli otettuun integraaliin soveltaa Jordanin lemmaa. Se kumpaa polkua voi käyttää, riippuu  $t$ :n arvosta.)

## Tehtävä 3

Ratkaise Laplaceen muunnosta käyttäen seuraava ns. uusiutumisyhtälö (engl. renewal equation)

$$f(t) = e^{-t} + \int_0^t a e^{-a(t-\tau)} f(\tau) d\tau, \quad t \geq 0,$$

jossa  $a > 0$ . Laske  $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t)$ .

(Jatkuu...)

#### Tehtävä 4 (tarkastettava tehtävä)

Laske  $T$ -jaksollisen funktion  $f(t)$  Laplace-muunnos, kun

$$f(t) = \begin{cases} \sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right), & \text{kun } 0 \leq t < \frac{T}{2}, \\ 0, & \text{kun } \frac{T}{2} \leq t < T. \end{cases}$$

#### Tehtävä 5

Etsi  $f$ , kun tiedetään, että funktion  $f$  Laplacen muunnos  $F = \mathcal{L}[f]$  on

$$F(s) = \frac{s}{s^2 + 4} - \frac{2se^{-s}}{s^2 - 4}.$$

#### Tehtävä 6

Ratkaise Laplacen muunnoksen avulla integrodifferentiaaliyhtälö

$$\int_0^t e^{t-\tau} \sin(t-\tau)x(\tau)d\tau = x'' - x' + e^t(1 - \cos t),$$

kun  $x'(0) = x(0) = 1$ .

#### Tehtävä 7

Olkoot  $k > n > 0$ . Laske

$$\int_{-\infty}^{\infty} \sin(kx) \sin(nx)dx,$$

kun tiedetään, että integraali  $\int_{-\infty}^{\infty} e^{ipx} \frac{dx}{2\pi}$  antaa Diracin  $\delta$ -distribuution  $\delta(p)$ .