Fysiikan matemaattiset menetelmät Ib Harjoitus 5
Syksy 2015 Ma 30.11.2015

Kurssipalautelomake on nyt avattu: linkki lomakkeeseen löytyy kurssin kotisivuilta. Lomakkeen voi käydä täyttämässä näiden harjoitusten palauttamiseen saakka, eli 30.11. klo 12 asti. Vastaamisesta saa tälläkin kertaa 3 laskuharjoituslisäpistettä.

Huom: Tällä kertaa tehtäviä on poikkeuksellisesti vain 6 kappaletta.

Tehtävät 1

Kun $f, g \in L^2(\mathbb{R})$ (eli, kun f ja g ovat neliöintegroituvia funktioita), määritellään niiden sisätulo kaavalla

$$\langle f|g\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)^* g(x)\mathrm{d}x\,.$$

(Tiedetään, että tämä integraali tällöin suppenee itseisesti, joten $\langle f|g\rangle \in \mathbb{C}$.)

Tarkista, että tällä sisätulolla on seuraavat ominaisuudet:

(a) $\langle f|g\rangle^* = \langle g|f\rangle$.
(b) $\langle f|\alpha g_1 + \beta g_2\rangle = \alpha\,\langle f|g_1\rangle + \beta\,\langle f|g_2\rangle$, kaikilla $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ ja $f, g_1, g_2 \in L^2(\mathbb{R})$.
(Tässä siis "$\alpha g_1 + \beta g_2$" tarkoittaa funktiota G, joka määritellään kaavalla $G(x) = \alpha g_1(x) + \beta g_2(x)$.)
(c) $\langle \alpha f_1 + \beta f_2|g\rangle = \alpha^*\langle f_1|g\rangle + \beta^*\langle f_2|g\rangle$.

Tehtävät 2

Millä reaalisen vakion a arvoilla alla annetut funktiot ovat neliöintegroituvia? (Eli milloin f kuuluu avaruuteen $L^2(\mathbb{R})$?)

$$\text{(a)}\ f(x) = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}px}}{(1+|x|)^a},\ \text{jossa } p \in \mathbb{R}\,, \qquad \text{(b)}\ f(x) = \frac{\mathrm{e}^{-|x|}}{|x|^a}\,.$$

(Jos haluat tutkia asiaa tarkemmin, tee sama useammassa ulottuvuudessa, eli avaruudessa $L^2(\mathbb{R}^n)$. Tällöin siis $\mathbf{x}, \mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$ ja "px" korvataan pistetulolla "$\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}$".)

Tehtävä 3

Laske funktion

$$f(x) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{4}x^2\,, & \text{kun } 0 < x \le 2\,, \\ 0\,, & \text{kun } x > 2\,, \end{cases}$$

Fourier'n kosini- ja siniesitys (eli Fourier'n muunnos parillista ja paritonta jatketta käyttäen).

(Jatkuu. . .)

$\boxed{\text{Tehtävä 4}}$ (tarkastettava tehtävä)

Laske Lorentzin jakauman

$$f(x) = \frac{\gamma}{\pi(x^2 + \gamma^2)}\,, \qquad \gamma > 0\,,$$

Fourier'n muunnos sekä saamasi funktion käänteismuunnos.

(*Vihje:* Residylaskenta.)

$\boxed{\text{Tehtävä 5}}$

Kvanttimekaniikassa vapaata hiukkasta voidaan kuvata funktion

$$\Psi(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(p) \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(px - \frac{\hbar p^2}{2m}t\right)} \frac{\mathrm{d}p}{2\pi}\,, \tag{1}$$

avulla, jossa $m > 0$ on hiukkasen massa, $\hbar > 0$ on Planckin vakio, ja painofunktio $\phi(p)$ huolehtii integraalin suppenemisesta.

(a) Tarkista, että $\Psi(x,t)$ todellakin toteuttaa vapaan hiukkasen Schrödingerin yhtälön,

$$\mathrm{i}\hbar\partial_t\Psi(x,t) = -\frac{\hbar^2}{2m}\partial_x^2\Psi(x,t)\,.$$

(b) Etsi $\phi(p)$, kun $\Psi(x,0) = C\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$ ja $C, \sigma > 0$. (*Vihje:* Saat laskettua Fourier'n muunnoksen sopivasti integrointipolkua siirtämällä. Jos muistat satulapistemenetelmän, pystyt vaivattomasti päättelemään mikä on "sopiva" integrointipolku, mutta polun löytää myös neliöksi täydentämällä.)

(c) Kvanttimekaniikassa vaaditaan lisäksi normitusehdon $\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x|\Psi(x,t)|^2 = 1$ toteutumista kaikilla t. Mikä yksinkertainen oletus funktiosta ϕ takaa, että tämä pätee aina kaavan (1) määrittelemille funktioille? (Vihje: Parseval.)

(d) Tarkastellaan kohdan (b) erikoistapausta. Ratkaise vakion C arvo, jolla kohdan (c) normitusehto toteutuu. Laske tämän jälkeen eksplisiittisesti $\Psi(x,t)$. Huomaa, että aaltopaketti ei pysy koossa ajan kuluessa, vaan hajoaa.

$\boxed{\text{Tehtävä 6}}$

Laske funktion $|\mathbf{r}|^{-a}$, jossa $a > 0$, kolmiulotteinen Fourier'n muunnos:

$$\mathcal{F}\left[\frac{1}{r^a}\right](\mathbf{p}) = \iiint \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\,\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}}}{r^a}\,,$$

missä $\mathbf{r} = (x,y,z)$, $r = |\mathbf{r}| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ ja $\mathbf{p}\cdot\mathbf{r} = p_1x + p_2y + p_3z$. Riittää, että annat integraaliesityksen funktiossa esiintyvälle vakiokertoimelle, sen numeerista arvoa ei tarvitse ratkaista. (Vihje: sopivasti valitut pallokoordinaatit ja muuttujanvaihto.)

Laske myös saamasi funktion $\mathcal{F}[r^{-a}](\mathbf{p})$ käänteismuunnoksen määrittelevä kolmiulotteinen Fourier'n integraali. Millä parametrin a arvoilla Fourier'n muunnoksen ja käänteismuunnoksen epäoleelliset integraalit suppenevat? Kun $a \to 1$, saadaan tästä Coulombin potentiaalin (tai Newtonin gravitaatiopotentiaalin) Fourier'n muunnos. Onko rajankäynti laillinen Fourier'n muunnoksessa tai käänteismuunnoksessa?