

Tehtävät 1

Oletetaan, että $f(x)$ on jatkuvasti derivoituva L -periodinen funktio. Ilmoita funktion $f'(x)$ Fourier-kertoimet käyttäen f :n Fourier-kertoimia $\hat{f}(k)$.

(*Vihje:* Osittaisintegrointi.)

Tehtävät 2

Tarkista alla oleva ns. polarisaatioidentiteetti, jossa w, z ovat mitä tahansa kompleksilukuja:

$$w^*z = \frac{1}{4} (|z + w|^2 - |z - w|^2 + i|z + iw|^2 - i|z - iw|^2) .$$

Tehtävä 3

Laske trigonometrisen sarjan $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}$ summa.

(*Vihje:* Saatat tarvita arctan-funktion sarjakehitelmää origossa.)

(Jatkuu...)

Tehtävä 4 (tarkastettava tehtävä)

Laske funktion

$$f(x) = 1 - x^2$$

sinisarja ja kosinisarja välillä $[0, 1]$.

Tehtävä 5

Kirjoita Parsevalin kaava funktiolle

$$f(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq \alpha; \\ 0, & \alpha < |x| \leq \pi \end{cases}$$

ja laske sen avulla seuraavien sarjojen summat

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n\alpha}{n^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2 n\alpha}{n^2}.$$

Tehtävä 6

Määritä differentiaaliyhtälön

$$y'' - 2y = f(x)$$

yleinen ratkaisu $y = y(x)$ yksityisratkaisun Fourier'n sarjan avulla, kun f on 2π -jaksollinen funktio ($f(x + 2\pi) = f(x)$), joka välillä $[0, 2\pi]$ on

$$f(x) = \frac{\pi - x}{2}.$$

Tehtävä 7

Tarkastellaan L -mittaisen x -akselin suuntaisen sauvan lämpötilajakaumaa $T(t, x)$, jossa paikka $x \in [0, L]$ ja aika $t \geq 0$. Lämmitetään sauvan päitä siten, että origossa olevan pään lämpötila pidetään T_1 :nä ja toisen pään lämpötila T_2 :na. Jos materiaalin lämmönjohtavuus $\kappa > 0$ ei riipu lämpötilasta, toteuttaa sauvan lämpötilajakauma tällöin ns. lämpöyhtälön

$$\partial_t T(t, x) = \kappa \partial_x^2 T(t, x),$$

ja lisäksi pätee joka hetkellä $T(t, 0) = T_1$ ja $T(t, L) = T_2$.

Ratkaise lämpötilajakauma $T(t, x)$, $t > 0$, kun alkujakauma $T(0, x) = T_0(x)$ on annettu. Määritä lisäksi, mitä sille tapahtuu, kun $t \rightarrow \infty$.

(Ohje: Etsi ensin kertoimet a, b , joilla funktio $f(t, x) := T(t, x) - a - bx$ toteuttaa Dirichlet'n reunaehdot $f(t, 0) = 0 = f(t, L)$. Käytä tämän jälkeen f :lle sinisarjaesitystä x :ssä, ja ratkaise sarjan kertoimien aikakehitys.)