

### Tehtävät 1 & 2

Tässä tehtävässä käsitellään *jatkeita*. Nämä ovat annetun funktion laajennuksia isompaan alueeseen siten, että uusi funktio toteuttaa halutun ehdon, kuten esimerkiksi periodisuuden.

- (a) Olkoon  $f(x) = -x$ , kun  $x \leq 0$ . Määritä sen *parillinen* jatke (eli  $F$ , jolle  $F(x) = F(-x)$  kaikilla  $x$  ja  $F(x) = f(x)$ , kun  $x \leq 0$ ).
- (b) Olkoon  $f(x) = 1 - x$ , kun  $x > 0$ . Määritä sen *pariton* jatke  $F$  ja laske jatkeelle  $F(0)$ , sekä raja-arvot  $F(0^-)$  ja  $F(0^+)$ .
- (c) Olkoon  $f(x) = x^2$ , kun  $-1 < x \leq 2\pi - 1$  ja  $F$  sen  $2\pi$ -*periodinen* jatke koko reaaliakselille. Etsi  $F$ :n epäjatkuvuuspaikat, sekä sen suurin ja pienin arvo.

### Tehtävä 3

- (a) Osoita, että jos  $f$  on  $L$ -periodinen funktio (eli  $f(x + L) = f(x)$ ), on kaikilla  $y \in \mathbb{R}$

$$\int_y^{L+y} f(x)dx = \int_0^L f(x)dx.$$

(Tätä tulosta käytettiin luennoilla, tapauksessa  $L = 2\pi$ ,  $y = -\pi$ .)

- (b) Oletetaan, että  $f$  ja  $g$  ovat  $2\pi$ -periodisia funktioita. Ilmoita funktion

$$F(x) = \int_0^{2\pi} f(x-y)g(y)dy$$

Fourier-kertoimet  $\widehat{F}(n)$  funktioiden  $f$  ja  $g$  Fourier-kertoimien avulla.  
(*Vihje*: Integrointijärjestyksen vaihto.)

(Jatkuu...)

**Tehtävä 4** (tarkastettava tehtävä)

Laske funktion

$$f(x) = |\cos x|$$

trigonometrinen sarja välillä  $[0, 2\pi]$ .

**Tehtävä 5**

Laske funktion

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \leq x < 0; \\ 1, & 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

Fourier'n sarja välillä  $[-\pi, \pi]$ . Mitä arvoja sarja saa seuraavissa pisteissä:  $x = -1$ ,  $x = 0$  ja  $x = 1$ ?

**Tehtävä 6**

Laske funktion  $f(x) = x \cos x$  trigonometrinen sarja välillä  $[-\pi, \pi]$ .

**Tehtävä 7**

Oletetaan, että  $|q| < 1$ . Laske sinin ja kosinin Eulerin kaavoja käyttäen funktion

$$f(x) = \frac{q \sin x}{1 - 2q \cos x + q^2}$$

Fourier'n sarja välillä  $[-\pi, \pi]$ .

(*Vihje:* Residylaskenta.)