Fysiikan matemaattiset menetelmät Ib Harjoitus 2

Syksy 2015 Ma 9.10.2014

Tällä kertaa tehtäviä on poikkeuksellisesti vain 6 kappaletta.

Tehtävä 1

(Johdantoa Fourier-analyysiin)

Olkoon $L \geq 1$ kokonaisluku ja $k \in \mathbb{Z}$. Laske

$$\sum_{n=0}^{L-1} \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi nk/L} .$$

(*Vihje:* Äärellinen geometrinen summa, mutta huolellisesti sovellettuna eri k:n arvoilla.)

Tehtävä 2

Gaussista normaalijakaumaa noudattavan satunnaismuuttujan määrää todennäköisyystiheys

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right] ,$$

jossa $\mu \in \mathbb{R}$ ja $\sigma > 0$.

(a) Osoita, että normalisaatio on oikein valittu: $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x = 1$.

(b) Osoita, että jakauman odotusarvo on μ: $\int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\mathrm{d}x = \mu$.

(c) Osoita, että jakauman keskihajonta on σ: $\int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 f(x)\mathrm{d}x = \sigma^2$

Tehtävä 3

Notaatio "$f(x) = o(g(x))$, kun $x \to \infty$", tarkoittaa, että $\lim_{x\to\infty} f(x)/g(x) = 0$. (Palautetaan samalla mieleen notaatio "$f(x) = O(g(x))$, kun $x \to \infty$", joka tarkoittaa, että löytyy jokin $M > 0$ ja x_0, jolla $|f(x)/g(x)| \leq M$ kun $x \geq x_0$.)

Osoita, että

(a) $x^a = o(\mathrm{e}^x)$, kun $x \to \infty$, millä tahansa $a \in \mathbb{R}$.

(b) $\mathrm{e}^{-x} = o(x^a)$, kun $x \to \infty$, millä tahansa $a \in \mathbb{R}$.

(c) $\ln x = o(x^{-a})$, kun $x \to 0^+$, millä tahansa $a > 0$.

(Jatkuu...)

$\boxed{\text{Tehtävä 4}}$ (tarkastettava tehtävä)

(Asymptoottinen häiriökehitelmä)

Tarkastellaan funktion

$$F(\lambda) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-t-\lambda t^2}\mathrm{d}t\,, \qquad \lambda \geq 0\,,$$

arvoja kun λ on pieni.

(a) Käytä integrandissa sarjakehitelmää $\mathrm{e}^{-\lambda t^2} = \sum_{n=0}^\infty \frac{(-\lambda)^n}{n!} t^{2n}$. Vaihda n-summan ja t-integraalin järjestystä ja laske saadut t-integraalit käyttäen Γ-funktion ominaisuuksia. Tulos on potenssisarja muuttujassa λ: mikä on sen suppenemissäde?

(b) Johda Taylorin lausetta käyttäen seuraava arvio, joka pätee aina kun $x \geq 0$ ja $N \geq 0$:

$$\left|\mathrm{e}^{-x} - \sum_{n=0}^N \frac{(-x)^n}{n!}\right| \leq \frac{x^{N+1}}{(N+1)!}\,.$$

(c) Sovella (b)-kohdan tulosta, ja osoita, että kun (a)-kohdan sarja "katkaistaan" sopivasti valittuun arvoon N saadaan aikaan approksimaatio, jonka tarkkuus on eksponentiaalisen hyvä muuttujassa $1/\lambda$ (eli löytyy jokin vakio $a > 0$, jolla virhe on $O(\mathrm{e}^{-a/\lambda})$.) (*Vihje:* Katkaisukohta voidaan valita siten, että $N = O(1/\lambda)$.)

$\boxed{\text{Tehtävä 5}}$

Määritellään Besselin funktiot kaavalla

$$J_n(\lambda) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \oint_\gamma \mathrm{e}^{\frac{\lambda}{2}(z-\frac{1}{z})} z^{-n-1}\mathrm{d}z\,,$$

jossa $n \geq 0$ on kokonaisluku, $\lambda > 0$, ja $\gamma(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$, $t \in [-\pi, \pi]$, on tuttu yksikköympyrää kerran vastapäivään kiertävä suljettu polku.

(a) Osoita, että tämä kaava antaa saman määritelmän kuin aiemmin esitetty integraali:

$$J_n(\lambda) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos\left(n\phi - \lambda\sin\phi\right)\mathrm{d}\phi\,.$$

(b) Ratkaise satulapistemenetelmää käyttäen Besselin funktion johtava asymptoottinen käytös, kun $\lambda \to \infty$.

$\boxed{\text{Tehtävä 6}}$

Laske satulapistemenetelmää käyttäen integraalin

$$\int_{-\infty}^\infty x^2 \mathrm{e}^{-\sqrt{N}x - x^2}\mathrm{d}x\,,$$

asymptoottinen kehitelmä, kun $N \to \infty$. Laske myös integraalin tarkka arvo ja vertaa tuloksia.