Fysiikan matemaattiset menetelmät Ib Harjoitus 1
Syksy 2015 Ma 2.10.2014

Ohjeita: Kuten Ia:lla, *tarkastettavat tehtävät*, joista jokaisesta saa maksimissaan *3 pistettä*, on merkitty alla kehyksellä tehtävän numeron ympärillä. Näissä laskareissa tarkastettavia ovat siis tehtävät 4, 5 ja 6.

Muista tehtävistä (1–3 ja 7) saa yhden pisteen per tehtävä. **Merkitse selkeästi vastauspaperin alkuun mitkä tehtävät olet saanut valmiiksi** (tähän riittää, että olet vastannut yli puoleen ko. tehtävän kysymyksistä). Näitä tehtäviä ei erikseen tarkasteta, mutta tyhjästä kohdasta ei saa pisteitä: muista siis palauttaa myös näiden tehtävien vastaukset.

Tehtävä 1

Kertaa residylaskentaa käymällä läpi tuloksen

$$\int_0^\infty \frac{x^{z-1}}{1+x}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}\,, \qquad 0 < z < 1\,,$$

johto, joko luentomuistiinpanojen sivuilta 71–72 tai Honkosesta sivulta 74. (Yksityiskohtia ei tarvitse kopioida vastaukseesi: riittää, että kerrot käyneesi läpi tuloksen.)

Tehtävä 2

Tutkitaan funktiota

$$F(z) := \int_{-\infty}^\infty \mathrm{e}^{\mathrm{i}zt}\mathrm{e}^{-\sqrt{1+t^2}}\mathrm{d}t\,, \qquad |\mathrm{Im}\,z| < 1\,.$$

(a) Osoita, että F on analyyttinen.
(*Vihje:* Merkitään $\Omega_\varepsilon := \{z \in \mathbb{C} \,|\, |\mathrm{Im}\,z| < 1-\varepsilon\}$, kun $0 \le \varepsilon < 1$. Osoitettava siis analyyttisyys alueessa Ω_0 (ääretön Re-akselin suuntainen "nauha"). Tämän voi tehdä huomaamalla, että jos $z \in \Omega_0$, niin löytyy $\varepsilon > 0$ jolla $z \in \Omega_\varepsilon$, joten riittää osoittaa analyyttisyys joukoissa Ω_ε arvoilla $\varepsilon > 0$.)

(b) Etsi funktiot $f_k(t,z)$, $k \in \mathbb{N}$, joiden avulla saadaan F:n k:s derivaatta integraalista $F^{(k)}(z) = \int_{-\infty}^\infty f_k(t,z)\mathrm{d}t$.

Tehtävä 3

Osoita, että sarjana määritelty funktio

$$F(z) = \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{(z+n)^2}$$

on integraalina määritellyn funktion

$$f(z) = \int_0^\infty \frac{t\mathrm{e}^{-tz}}{1-e^{-t}}\mathrm{d}t$$

analyyttinen jatko. (*Vihje:* Aloita todistamalla, että $f(z) = F(z)$ kun $z > 0$.)

(Jatkuu...)

$\boxed{\text{Tehtävä 4}}$ (tarkastettava tehtävä)

Osoita Eulerin Γ-funktion ominaisuuksia käyttäen, että *digammafunktiolle* $\psi(z) = \Gamma'(z)/\Gamma(z)$ ovat voimassa kaavat

$$\psi(z+1) = \psi(z) + \frac{1}{z}\,, \quad \psi(1-z) - \psi(z) = \pi \cot \pi z\,.$$

$\boxed{\text{Tehtävä 5}}$

Laske integraalit

$$\text{(a)} \int_0^\infty x\mathrm{e}^{-x^4}\mathrm{d}x\,, \qquad \text{(b)} \int_0^1 \ln^{z-1}(1/t)\mathrm{d}t\,, \quad \mathrm{Re}\,z > 0\,, \qquad \text{(c)} \int_{-1}^1 (1+x)^{\frac{1}{3}}(1-x)^{-\frac{2}{3}}\mathrm{d}x\,,$$

Eulerin Γ- ja B-funktioiden avulla.

$\boxed{\text{Tehtävä 6}}$

Riemannin ζ-funktio voidaan esittää sarjana

$$\zeta(z) = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^z}\,,$$

kun $\mathrm{Re}\,z > 1$. Johda seuraava esitys eräälle ideaalisen bosonikaasun statistiikassa esiintyvälle integraalille:

$$\int_0^\infty \frac{t^{z-1}}{e^t - 1}\mathrm{d}t = \Gamma(z)\zeta(z)\,, \quad \mathrm{Re}\,z > 1\,.$$

(*Vihje:* Honkonen, Esimerkki 4.2, tai prujut sivu 73.)

Tehtävä 7

Todista seuraava tulos

$$\int_0^1 x^{-x}\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^\infty n^{-n}\,.$$

(*Vihje:* Exponenttifunktion sarjakehitelmä, muuttujanvaihto ja Γ-funktio.)