6. Fourier'n muunnos

Johdantoa) Tarkastellaan aluksi jatkuvaa funktiota f, joka toteuttaa Dirichlet'n ehdon jokaisella välillä $[-M,M)$. Tällöin sen arvo pisteessä x_0 saadaan käyttämällä mitä tahansa Fourier'n sarjaa välillä $[-M,M)$, kunhan vain pätee $M > |x_0|$. Eli, kun $L = 2M$, $M > |x_0|$, ja määritellään

$$\hat{f}(k;L) = \int_{-M}^{M} e^{-i2\pi k \frac{y}{L}} f(y) \frac{dy}{L}$$

pätee

$$f(x_0) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{i2\pi k \frac{x_0}{L}} \hat{f}(k;L).$$

Oletetaan sitten lisäksi, että $\int_{-\infty}^{\infty} |f(y)|\, dy < \infty$. Tällöin voidaan approksimoida

$$\hat{f}(k;L) \approx \frac{1}{L} \hat{f}\left(2\pi \frac{k}{L}\right), \quad \text{jossa}$$

$$\hat{f}(p) := \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ipy} f(y)\, dy.$$

Tällöin siis

$$f(x_0) \approx \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{i2\pi \frac{k}{L} x_0} \hat{f}\left(2\pi \frac{k}{L}\right) \frac{1}{2\pi} \frac{2\pi}{L}$$

$$\xrightarrow{L\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ipx_0} \hat{f}(p) \frac{dp}{2\pi},$$

kunhan $\hat{f}$ on riittävän säännöllinen.

* Näin päädytään Fourier'n analyysiin koko reaaliakselilla:

Funktion f Fourier'n muunnos määritellään siis

$$\hat{f}(p) := \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ipx} f(x)\,dx$$

ja tätä merkitään usein myös $\hat{f} = \mathcal{F}f = \mathcal{F}[f]$.

Fourier'n käänteismuunnos on tällöin

$$(\mathcal{F}^{-1}[\hat{f}])(x) := \int_{-\infty}^{\infty} e^{ipx} \hat{f}(p) \frac{dp}{2\pi}.$$

* $\mathcal{F}$ ja $\mathcal{F}^{-1}$ ovat hyvin samankaltaisia muunnoksia: $\mathcal{F}^{-1}[g](x) = \frac{1}{2\pi} \mathcal{F}[g](-x)$.

* Fourier'n muunnoksen määrittelyssä on paljon vaihtelua, esim. käytetäänkö integrandissa eksponenttia "e^{-ipx}" vai "e^{ipx}".
(Yo. määritelmät fysiikassa tavanomaisimpia.)
Samoin "2π"-termien sijoittelu vaihtelee.
Alla kaksi tavallisinta variaatiota:

1) Normitukseltaan helppokäyttöisin on siirtää muuttujanvaihdolla kerroin "2π" eksponenttiin ($p = 2\pi k$): Saadaan

$$\mathcal{F}[f](k) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i2\pi kx} f(x)\,dx$$

ja $\mathcal{F}^{-1}[g](x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i2\pi kx} g(k)\,dk = \mathcal{F}[g](-x)$.

2) Toinen tapa tehdä muunnoksista symmetrisempi, on jakaa kerroin tasaisesti muunnosten välillä:

$$\mathcal{F}[f](p) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ipx} f(x) \frac{dx}{\sqrt{2\pi}}, \quad \mathcal{F}^{-1}[g](x) = \mathcal{F}[g](-x).$$

Lisä)

* Fourier'n muunnosta käytetään erityisesti seuraavissa kahdessa funktioavaruudessa: $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ ja $L^2(\mathbb{R})$, sillä näille pätee

a) Jos $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, on myös $\mathcal{F}[f] \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, ja käänteiskaava

$$\mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}[f]](x) = f(x)$$

pätee kaikilla $x \in \mathbb{R}$. (eli "pisteittäin").

b) Jos $f \in L^2(\mathbb{R})$, on myös $\mathcal{F}[f] \in L^2(\mathbb{R})$, ja käänteiskaava $\mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}[f]] = f$ pätee L^2-normissa (eli melkein kaikkialla).

* Funktioavaruus $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ koostuu ns. Schwartzin funktioista (engl. rapidly decreasing functions). Nämä ovat mielivaltaisen monta kertaa kaikkialla derivoituvia funktioita, joiden derivaatat vähenevät äärettömyydessä nopeammin kuin mikään potenssi: Vaaditaan, että kaikilla $k, n \in \mathbb{N}_0$ löytyy yläraja $C_{k,n}$, jolla

$$|x^n f^{(k)}(x)| \leq C_{k,n} \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

* $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ tulee vastaan erityisesti distribuutioteoriassa, joka on kurssin viimeinen aihe.

---

* Kuten Fourier'n sarjoille, saadaan tässäkin tyypillisesti käänteiskaavasta f:n "hyppykohdissa" funktion arvo hypyn puolivälistä, eli

$$\mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}[f]](x) = \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2}.$$

$\Rightarrow$ yleensä $\mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}[f]](x) = f(x)$, jos f jatkuva pist. x.

* Samoin kuin Fourier'n sarjoille, voi tässäkin sijoituksella $e^{ipx} = \cos(px) + i\sin(px)$ rakentaa integraaliesityksen trigonometristen funktioiden avulla. Näitä käytetään yleensä vain, jos f on parillinen tai pariton.

a) Jos f on <u>parillinen</u>, on

$$\hat{f}(p) = \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\cos(px) f(x)}_{\text{parillinen}} dx + i \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\sin(px) f(x)}_{\text{pariton}} dx$$

$$= 2\int_0^{\infty} \cos(px) f(x)\, dx.$$

$\Rightarrow$ $\hat{f}(p)$ on myös parillinen, joten

$$\mathcal{F}^{-1}[\hat{f}](x) = \int_{-\infty}^{\infty} \cos(px) \hat{f}(p) \frac{dp}{2\pi}$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \cos(px) \hat{f}(p)\, dp.$$

b) Jos f on <u>pariton</u>, saadaan samalla tavalla

$$\hat{f}(p) = 2i \int_0^{\infty} \sin(px) f(x)\, dx \quad (= \text{pariton})$$

ja $\mathcal{F}^{-1}[\hat{f}](x) = \frac{-i}{\pi} \int_0^{\infty} \sin(px) \hat{f}(p)\, dp.$

* Näistä sopivasti kertoimia siirtämällä saadaan aikaiseksi positiivisella reaaliakselilla $(0,\infty)$ määritellyn funktion f

a) Kosinimuunnos: $\mathcal{F}_c[f](p) = \int_0^{\infty} \cos(px) f(x)\, dx$, $p>0$

b) Sinimuunnos: $\mathcal{F}_s[f](p) = \int_0^{\infty} \sin(px) f(x)\, dx$, $p>0$

Joiden käänteismuunnokset ovat

a) $\mathcal{F}_c^{-1}[g](x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \cos(px)\, g(p)\, dp \ , \quad x>0.$

(sillä $\mathcal{F}_c[f](p) = \frac{1}{2}\hat{h}(p)$, jossa h on funktion f parillinen jatke : $h(x) = f(-x)$, $x<0$.)

b) $\mathcal{F}_s^{-1}[g](x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \sin(px)\, g(p)\, dp \ , \quad x>0.$

(sillä $\mathcal{F}_s[f](p) = \frac{1}{2i}\hat{h}(p)$, jossa h on funktion f pariton jatke : $h(x) = -f(-x)$, $x<0$.)

<u>Esim 6.2.</u> : Funktion $f(x) = e^{-a|x|}$ Fourier'n muunnos, kun $a>0$?

$$\hat{f}(p) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ipx} e^{-a|x|}\, dx$$

$$= \int_0^\infty e^{-ipx-ax}\, dx + \int_{-\infty}^0 e^{-ipx+ax}\, dx$$

$$= \Big/_0^\infty \frac{1}{-ip-a} e^{-ipx-ax} + \Big/_{-\infty}^0 \frac{1}{-ip+a} e^{-ipx+ax}$$

$$\overset{a>0}{=} 0 - \frac{-1}{ip+a} + \frac{1}{-ip+a} - 0$$

$$= \frac{1}{ip+a} + \frac{1}{-ip+a} = \frac{(ip+a)^*}{\underbrace{|ip+a|^2}_{=p^2+a^2}} + \frac{(-ip+a)^*}{\underbrace{|-ip+a|^2}_{=p^2+a^2}}$$

$$= \frac{-\cancel{ip}+a+\cancel{ip}+a}{p^2+a^2} = \frac{2a}{p^2+a^2}$$

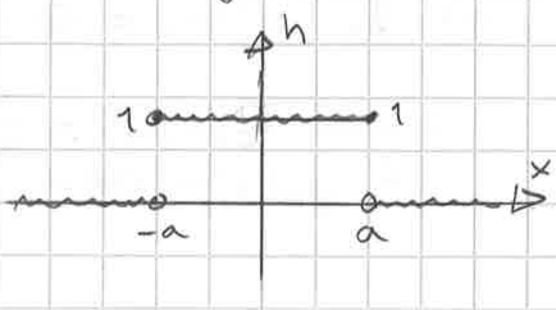
<u>Eli</u>, $\hat{f}(p) = \frac{2a}{p^2+a^2}$, kun $a>0$.

Lisä:)

* Kun $a=0$, on $f(x)=1$, rajoitettu, mutta ei L^2-integroituva. ($\Rightarrow$ Fourier-muunnosta ei ole määritelty funktiona. On määr. distribuutiona: ks. kirjan viimeinen luku.)
* Kun $a<0$, $f(x)$ on eksponentiaalisesti kasvava, eikä $\hat{f}$ ole määritelty edes distribuutiona.

Esim. 6.1.: Laske suorakulmaisen pulssin
$$f(x) = \mathbb{1}(0 < x \leq a), \quad a > 0,$$
a) kosinimuunnos ja b) sinimuunnos.

a) f:n kosinimuunnos = parillisen jatkeen h Fourier'n muunnos:



Kun $p > 0$ saadaan yo. kaavoista:

$$\mathcal{F}_c[f](p) = \int_0^\infty \cos(px) f(x)\,dx$$
$$= \int_0^a \cos(px)\,dx = \Big/_0^a \frac{1}{p}\sin(px)$$
$$= \frac{\sin(pa)}{p}.$$

b) sinimuunnos = parittoman jatkeen Fourier'n muunnos:

$$\mathcal{F}_s[f](p) = \int_0^\infty \sin(px) f(x)\,dx$$
$$= \int_0^a \sin(px)\,dx$$

$$= \Big/_0^a \frac{1}{p}\left(-\cos(px)\right)$$
$$= \frac{1}{p}\left(1 - \cos(pa)\right).$$

Käänteismuunnoksista saadaan "laskettua" seuraavat integraalit:
$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin(pa)\cos(px)}{p}\,dp = \begin{cases} 1, & \text{kun } 0 \leq x < a, \\ \frac{1}{2}, & \text{kun } x = a, \\ 0, & \text{kun } x > a. \end{cases}$$
ja
$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{(1-\cos(pa))\sin(px)}{p}\,dp = \begin{cases} 1, & \text{kun } 0 < x < a, \\ \frac{1}{2}, & \text{kun } x = a, \\ 0, & \text{kun } x > a \text{ tai } x = 0. \end{cases}$$