Yllä oleva Fourier'n sarjojen ominaisuus on esimerkki yleisemmästä ominaisuudesta, joka liittyy skalaarituloihin ja sen suhteen ortonormaaleihin joukkoihin:

Skalaari- eli sisätulot

Palautetaan aluksi mieleen kaksi (toivottavasti) tuttua erikoistapausta:

a) $\mathbb{R}^N$:n pistetulo:

Kun $\bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{R}^N$ on niiden skalaaritulo = pistetulo, eli

$$\bar{x} \cdot \bar{y} := \sum_{i=1}^{N} x_i y_i \in \mathbb{R}$$

Tällöin vektorin $\bar{x}$ pituus toteuttaa

$$|\bar{x}| = \sqrt{\bar{x} \cdot \bar{x}}.$$

b) $\mathbb{C}^N$:n skalaaritulo:

Kun $\bar{z}, \bar{w} \in \mathbb{C}^N$, määritellään

$$\bar{w} \cdot \bar{z} = \sum_{i=1}^{N} w_i^* z_i \in \mathbb{C}$$

Tätä merkitään joskus myös $\langle \bar{w}, \bar{z} \rangle$ tai $\langle \bar{w} | \bar{z} \rangle$. Tällöinkin pätee

$$|\bar{z}| := \sqrt{\sum_{i=1}^{N} |z_i|^2} = \sqrt{\bar{z} \cdot \bar{z}}.$$

* Huomaa, että tämä skalaaritulo ei ole symmetrinen, vaan päteekin $\bar{z} \cdot \bar{w} = (\bar{w} \cdot \bar{z})^*$.

c) Samaan tapaan määritellään L^2:n skalaaritulo kaavalla

$$\langle f | g \rangle := \int f(x)^* g(x)\,dx, \quad f, g \in L^2.$$

(Merkitään usein myös $\langle f, g \rangle$.)

* Hölderin epäyhtälön perusteella integraali suppenee itseisesti aina kun $f, g \in L^2$; nimittäin,

$$|\langle f|g\rangle| \le \int |f(x)|\,|g(x)|\,dx \overset{\text{Hölder}}{\le} \sqrt{\int |f(x)|^2 dx} \times \underbrace{\sqrt{\int |g(x)|^2 dx}}_{=\|g\|}$$
$$= \|f\|\,\|g\| < \infty.$$

* Kuten a):ssa ja b):ssä, saadaan L^2:ssakin normin skalaaritulosta, sillä

$$\|f\| = \sqrt{\int |f(x)|^2 dx} = \sqrt{\langle f|f\rangle}.$$

* Tätä avaruutta käsitellään enemmän FYMM II:lla (Se on esimerkki ns. Hilbert-avaruudesta.)

* Yo. skalaaritulolle ja normille pätevät seuraavat perusominaisuudet (todistukset kohtuullisen suoraviivaisia, mutta hypätään ne yli.)

1) $\langle f|g\rangle^* = \langle g|f\rangle$
2) $\langle f|\alpha g_1 + \beta g_2\rangle = \alpha \langle f|g_1\rangle + \beta \langle f|g_2\rangle$
   $\langle \alpha f_1 + \beta f_2 | g\rangle = \alpha^* \langle f_1|g\rangle + \beta^* \langle f_2|g\rangle$
   ($\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ vakioita)

3) $\|f\|^2 = \langle f|f\rangle \ge 0$
4) $\|\alpha f\| = |\alpha|\,\|f\|$, kun $\alpha \in \mathbb{C}$ on vakio
5) $\|f+g\| \le \|f\| + \|g\|$

Otetaan käyttöön seuraavat termit:

* $f, g \in L^2$ ovat ortogonaalisia, jos $\langle f|g\rangle = 0$.

* $f \in L^2$ on normitettu, jos $\|f\| = 1$.

* Funktiojoukko $\{e_n\}$ on ortonormaali, jos

$$\langle e_n | e_m \rangle = \delta_{nm} = \begin{cases} 0, & \text{kun } n \neq m, \\ 1, & \text{kun } n = m. \end{cases}$$

* Lisäksi sanotaan, että $f_n \to f$ L_2-normissa, kun $n \to \infty$, jos

$$\lim_{n\to\infty} \|f - f_n\| = 0 \iff \lim_{n\to\infty} f_n = f.$$

(Termiä käytettiin jo Fourier'n sarjoista puhuttaessa, ks. s. 112.)

* Sivun 112 kaavan (O6) perusteella, on joukko $\{e_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ ortonormaali avaruudessa $L^2([0,2\pi])$, kun määritellään $e_k(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikx}$.

Ortonormaalien funktiojoukkojen ominaisuuksia

Olkoon tässä $\{e_n\}$ mikä tahansa ortonormaali funktiojoukko, joka on siis parametrin n indeksoima.

* Kun $f \in L^2$, voidaan määritellä skalaaritulot

$$c_n := \langle e_n | f \rangle = \int e_n(x)^* f(x)\,dx.$$

Näitä lukuja kutsutaan joskus myös "Fourier-kertoimiksi joukon $\{e_n\}$ suhteen".

* Syy: Jos $e_n(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{inx}$ ja $f \in L^2([0,2\pi])$

saadaan $c_n = \int_0^{2\pi} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-inx} f(x)\,dx = \sqrt{2\pi}\,\hat{f}(n)$.

Normalisaatiosta tullut "ylimääräinen" kerroin "$\sqrt{2\pi}$" selitetään myöhemmin...

* Näillä kertoimilla on mielenkiintoinen minimointiominaisuus:

Olkoon J mikä tahansa <u>äärellinen</u> joukko indeksejä n. (Eli esim. $J = \{n_1, n_2, \dots, n_N\}$.) Valitaan jokaista indeksiä $n \in J$ kohti jokin kerroin $\alpha_n \in \mathbb{C}$. Tällöin

$g = \sum_{n \in J} \alpha_n e_n(x)$ on äärellinen lineaarikombinaatio funktioista $e_n, n \in J$, joka kuuluu joukkoon L^2. (Sillä ominaisuuksia "4)" ja "5)" iteroimalla nähdään, että

$$\|\sum_{n\in J} \alpha_n e_n\| \leq \sum_{n\in J} \|\alpha_n e_n\| = \sum_{n\in J} |\alpha_n| \underbrace{\|e_n\|}_{=1}$$
$$= \sum_{n\in J} |\alpha_n| < \infty$$, koska J on äärellinen.)

Joukon $\{e_n\}$ ortonormaaliutta hyväksi käyttäen saadaan laskettua g:n normi tarkasti:

$$\|g\|^2 = \|\sum_{n\in J} \alpha_n e_n\|^2 = \langle \sum_{n'\in J} \alpha_{n'} e_{n'} | \sum_{n\in J} \alpha_n e_n \rangle$$
$$\overset{"2)"}{=} \sum_{n'\in J} \alpha_{n'}^* \langle e_{n'} | \sum_{n\in J} \alpha_n e_n \rangle$$
$$= \sum_{n'\in J} \sum_{n\in J} \alpha_{n'}^* \alpha_n \overbrace{\langle e_{n'} | e_n \rangle}^{=\delta_{n'n}} = \sum_{n\in J} \alpha_n^* \alpha_n = \sum_{n\in J} |\alpha_n|^2.$$

Yritetään nyt etsiä kertoimet α_n, $n \in J$, jotka parhaiten approksimoivat funktiota f L^2-normissa, eli tehtävänä on minimoida $\|f-g\|$.

Kuten yllä, ortonormaaliutta hyväksi käyttäen nähdään, että

$$\|f - \sum_n \alpha_n e_n\|^2 = \langle f - \sum_{n'} \alpha_{n'} e_{n'} \mid f - \sum_n \alpha_n e_n \rangle$$

$$\overset{\text{"2)"}}{=} \langle f \mid f \rangle - \sum_n \alpha_n \underbrace{\langle f \mid e_n \rangle}_{= c_n^*} - \sum_{n'} \alpha_{n'}^* \underbrace{\langle e_{n'} \mid f \rangle}_{= c_{n'}}$$

$$+ \underbrace{\langle \sum_{n'} \alpha_{n'} e_{n'} \mid \sum_n \alpha_n e_n \rangle}_{= \|\sum_n \alpha_n e_n\|^2 = \sum_n |\alpha_n|^2}$$

$$= \|f\|^2 + \sum_n |\alpha_n|^2 - \sum_n (\alpha_n c_n^* + \alpha_n^* c_n)$$

$$= \|f\|^2 - \sum_n |c_n|^2 + \sum_n \underbrace{(\alpha_n^* \alpha_n + c_n^* c_n - \alpha_n c_n^* - \alpha_n^* c_n)}_{= (\alpha_n^* - c_n^*)(\alpha_n - c_n) = (\alpha_n - c_n)^*(\alpha_n - c_n)}$$

$$= \|f\|^2 - \sum_n |c_n|^2 + \sum_n |\alpha_n - c_n|^2.$$

Tästä nähdään suoraan, että jos $\alpha_n \neq c_n$ jollakin $n \in J$, pätee

$$\|f - \sum_n \alpha_n e_n\|^2 > \|f\|^2 - \sum_n |c_n|^2.$$

Toisaalta, jos $\alpha_n = c_n$ $\forall n \in J$, saadaan

$$(*) \quad \|f - \sum_n c_n e_n\|^2 = \|f\|^2 - \sum_n |c_n|^2 \geq 0.$$

[Näin ollen kertoimista c_n muodostettu lineaarikombinaatio antaa aina (L^2-normissa) parhaan approksimaation, ja sille pätee

$$\|f\|^2 \geq \sum_{n \in J} |c_n|^2 = \|\sum_{n \in J} c_n e_n\|^2.$$
]

Oletetaan yksinkertaisuuden vuoksi, että indeksointi on tehty käyttäen positiivisia kokonaislukuja $n \in \mathbb{N}_+$. (Tämän voi tehdä kaikissa "normaalisti" vastaan tulevissa esimerkeissä "numeroimalla" alkuperäiset indeksit. Esim. Fourier'n sarjoissa voidaan käydä indeksit $k \in \mathbb{Z}$ läpi järjestyksessä $0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \ldots$.)

Sovelletaan yo. tulosta joukkoihin $J_N := \{1, 2, \ldots, N\}$, jolloin saadaan tulos

$$\|f\|^2 \geq \sum_{n=1}^{N} |c_n|^2 .$$ Oikea puoli muodostaa

kasvavan jonon, joka epäyhtälön perusteella on ylhäältä rajoitettu. Näin ollen on jonon raja-arvo olemassa, kun $N \to \infty$. Tästä saadaan

Besselin epäyhtälö:

Jos $\{e_n\}$ on ortonormaali funktiojoukko, pätee kaikilla $f \in L^2$ epäyhtälö

$$\|f\|^2 \geq \sum_n |c_n|^2, \text{ jossa } c_n = \langle e_n | f \rangle .$$

Lisäksi sarja $\sum_n c_n e_n$ suppenee L^2-normissa kohti funktiota f, jos ja vain jos

$$\|f\|^2 = \sum_n |c_n|^2 .$$

(Jälkimmäinen väite seuraa sivun 117 kaavasta (*), jonka mukaan

$$\|f - \sum_{n=1}^{N} c_n e_n\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{n=1}^{N} |c_n|^2 \xrightarrow{N \to \infty} 0 .)$$

* Ortonormaali kokoelma on <u>täydellinen</u>, jos mikä tahansa $f \in L^2$ voidaan esittää summan $\sum_n c_n e_n$ avulla. Besselin epäyhtälön mukaan, tämä tapahtuu täsmälleen silloin, kun

$$\|f\|^2 = \sum_n |\langle e_n|f\rangle|^2 \quad \forall f \in L^2.$$

* Täydellistä ortonormaalia joukkoa $\{e_n\}$ kutsutaan myös avaruuden L^2 <u>ortonormaaliksi kannaksi</u>.

<u>Esimerkki</u>: Tutkitaan $\mathbb{R}^3$:sta ja sen yksikkövektoreita $e_1 = (1,0,0)$; $e_2 = (0,1,0)$, $e_3 = (0,0,1)$. Selvästi $e_i \circ e_j = \delta_{ij}$, joten molemmat joukoista $\{e_1, e_2\}$ ja $\{e_1, e_2, e_3\}$ ovat ortonormaaleja. Näistä vain jälkimmäinen on täydellinen, sillä esim.

$$\|e_3\|^2 = 1 \quad \text{ja} \quad \sum_{n=1}^{2} |\langle e_n|e_3\rangle|^2 = 0 \neq 1.$$

<u>Parsevalin kaava</u>:

Jos $\{e_n\}$ on avaruuden L^2 ortonormaali kanta, pätee kaikilla $f \in L^2$

$$\|f\|^2 = \int |f(x)|^2\,dx = \sum_n |\langle e_n|f\rangle|^2.$$

* Erityisesti tämä pätee, kun $e_k(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikx}$, $k \in \mathbb{Z}$, jolloin $\langle e_k|f\rangle = \sqrt{2\pi}\,\hat{f}(k)$. $\Rightarrow$

$$\int_0^{2\pi} |f(x)|^2\,dx = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{f}(k)|^2 \quad \forall f \in L^2([0,2\pi]).$$

* Tässä kannassa täydellisyys tarkoittaa juuri Fourier'n sarjojen suppenemista L^2-normissa:

$$\sum_k \langle e_k | f \rangle e_k(x) = \sum_k \sqrt{2\pi}\, \hat{f}(k) \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikx}$$
$$= \sum_k \hat{f}(k) e^{ikx} = f\text{:n Fourier'n sarja.}$$

* Huomaa, että välin ja indeksien valinta vaikuttaa siihen, onko jokin funktiojoukko täydellinen.

Esim: 1) $\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikx}\}_{k \geq 0}$ ei ole täydellinen $L^2([0, 2\pi])$:ssä

2) Joukko $\{\frac{1}{\alpha_k} \sin(kx)\}_{k \in \mathbb{N}_+}$ on

ortonormaali $L^2([-\pi, \pi])$:ssä, kun $\alpha_k := \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(kx)\, dx}$. Se ei ole täydellinen.

(Jos $f \in L^2$ on parillinen, on $\forall k$ $\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(kx)\, dx = 0$.)

3) Joukko $\{\frac{1}{\beta_k} \sin(kx)\}_{k \in \mathbb{N}_+}$ on ortonormaali

ja täydellinen $L^2([0, \pi])$:ssä kun $\beta_k := \sqrt{\int_0^{\pi} \sin^2(kx)\, dx}$. (Sinisarja)

* Normitukset sopivasti valitsemalla, on joukko $\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\alpha_k} \sin(kx), \frac{1}{\beta_k} \cos(kx)\}_{k \in \mathbb{N}_+}$ ortonormaali

kanta avaruudelle $L^2([-\pi, \pi])$.
Parsevalin kaava antaa tällöin yhtälön

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx = \pi \left[\frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(|a_k|^2 + |b_k|^2 \right) \right]$$

jossa a_k, b_k ovat f:n trigonometrisen sarjan kertoimet (ks. s. 103).

(Syy: suoraan laskemalla huomataan, että
$|a_k|^2 + |b_k|^2 = 2(|\hat{f}(k)|^2 + |\hat{f}(-k)|^2)$, $k \in \mathbb{N}_+$.
Koska lisäksi $|\hat{f}(0)|^2 = |\frac{a_0}{2}|^2$, saadaan Fourier'n sarjan Parsevalin kaavasta

$$\|f\|^2 = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{f}(k)|^2$$

$$= \pi \left[\frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(|\hat{f}(k)|^2 + |\hat{f}(-k)|^2 \right) \right].\ )$$

Parsevalin kaavasta seuraa suoraan myös esitys skalaarituloille:

Plancherelin kaava:

Jos $\{e_n\}$ on avaruuden L^2 ortonormaali kanta, pätee kaikilla $f, g \in L^2$

$$\langle f | g \rangle = \sum_n \langle f | e_n \rangle \langle e_n | g \rangle$$

Todistus: Lähdetään liikkeelle Harj. 4 teht. 2:ssa johdetusta polarisaatioidentiteetistä:

$$w^* z = \frac{1}{4}\left(|z+w|^2 - |z-w|^2 + i|z+iw|^2 - i|z-iw|^2 \right).$$

Kun $w = f(x)$, $z = g(x)$ saadaan tästä tulos

$$\langle f | g \rangle = \int f(x)^* g(x)\, dx$$

$$= \frac{1}{4}\left(\|g+f\|^2 - \|g-f\|^2 + i\|g+if\|^2 - i\|g-if\|^2 \right)$$

Toisaalta, kun $w_n = \langle e_n | f \rangle$, $z_n = \langle e_n | g \rangle$, seuraa

$$\langle f | e_n \rangle \langle e_n | g \rangle = w_n^* z_n$$
$$= \frac{1}{4}\left(|z_n + w_n|^2 - |z_n - w_n|^2 + i|z_n + iw_n|^2 - i|z_n - iw_n|^2 \right)$$

Kun $\alpha \in \mathbb{C}$, on $z_n + \alpha w_n = \langle e_n | g \rangle + \alpha \langle e_n | f \rangle$
$= \langle e_n | g + \alpha f \rangle$, joten Parsevalin kaavan perusteella:

$$\sum_n |z_n + \alpha w_n|^2 = \sum_n |\langle e_n | g + \alpha f \rangle|^2 = \|g + \alpha f\|^2.$$

Näin ollen saadaan

$$\sum_n \langle f | e_n \rangle \langle e_n | g \rangle$$
$$= \frac{1}{4}\left(\|g+f\|^2 - \|g-f\|^2 + i\|g+if\|^2 - i\|g-if\|^2 \right)$$
$$= \langle f | g \rangle,$$ eli Plancherelin kaava. □