b) Jos f on **pariton**, on siitä myös integrandi $\cos kx \cdot f(x) \Rightarrow a_k = 0 \ \forall k$.

$\Rightarrow$ Fourier-sarja sisältää vain sin-termejä

$$= \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx.$$

* Tämä selittää, miksi Esim. 5.1. saatiin pelkästään sin-termejä sisältävä reaalinen sarja ($f(x) = x$, $|x| < \pi$, on pariton reaalinen funktio) ja Esim. 5.2:ssa reaalinen cos-termejä sisältävä sarja ($f(x) = x^2$, $|x| < \pi$, on parillinen reaalinen funktio.)

L-periodisen funktion Fourier-sarja

* Entä, jos f onkin L-periodinen, $L \neq 2\pi$? Voidaanko tällöin f kehittää Fourier-sarjaksi joka "toimii" kaikkialla?

* Kyllä, helpostikin:

Määritellään apufunktio $g(y) = f(\frac{L}{2\pi} y)$, $y \in \mathbb{R}$.

Tällöin $g(y + 2\pi) = f(\frac{L}{2\pi}(y + 2\pi))$

$$= f(\frac{L}{2\pi} y + L) \overset{f = L\text{-periodinen}}{=} f(\frac{L}{2\pi} y) = g(y)$$

eli g onkin 2π-periodinen. Sen Fourier-sarja on

$$s(y) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{iky} \hat{g}(k), \quad \text{jossa}$$

$$\hat{g}(k) = \int_0^{2\pi} e^{-iky} g(y) \frac{dy}{2\pi} = \int_0^{2\pi} e^{-iky} f(\frac{L}{2\pi} y) \frac{dy}{2\pi}$$

$$x = \frac{L}{2\pi} y$$

$$= \int_0^L e^{-ik\frac{2\pi}{L}x} f(x) \frac{2\pi}{L}\frac{dx}{2\pi} = \int_0^L e^{-i2\pi k\frac{x}{L}} f(x) \frac{dx}{L}$$

Koska $f(x) = g(\frac{2\pi}{L}x)$, saadaan kaikille Dirichlet'n ehdon toteuttaville funktioille, mahdollisia epäjatkuvuuspisteitä lukuunottamatta,

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{i2\pi k\frac{x}{L}} \hat{f}(k;L), \quad \text{jossa}$$

Fourier-kertoimet ovat

$$\hat{f}(k;L) := \int_0^L e^{-i2\pi k\frac{x}{L}} f(x) \frac{dx}{L}.$$

Funktion esittäminen pelkästään cos- tai sin-sarjana

* Edelläolevat kaavat mahdollistavat funktioiden esittämisen millä tahansa välillä $[a,b]$ joko eksponenttien tai cosinin ja sinin avulla. (periodi $L = b-a$)

Entä, jos halutaan käyttää pelkästään joko sinejä tai cosinejä?

Aiemman mukaan tämä onnistuu seuraavasti:

a) Jatketaan ensin f parilliseksi välille $[a-L,a]$ ja sen jälkeen $2L$-periodiseksi koko reaaliakselille. $\Rightarrow$ f:n trigonometrisessa sarjassa kaikki sin-termit häviävät, eli saadaan f:n esitys pelkästään cosinien sarjana.

Saman voi tehdä myös käyttäen apufunktiota kuten edellä: Määritellään

$$g(y) = f\left(\frac{L}{\pi}y + a\right), \quad y \in [0,\pi]$$

jolloin sen parillinen jatke saadaan

määrittelemällä $g(-y) = g(y)$, kun $y \in [-\pi, 0)$. Tämän jälkeen jatketaan g 2π-periodiseksi ja sen trigonometrinen sarja on g:n parillisuuden perusteella

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos ky \,, \quad \text{jossa}$$

$$a_k = \int_{-\pi}^{\pi} \cos ky \cdot g(y) \frac{dy}{\pi} \overset{g \text{ parillinen}}{=} \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \cos ky \cdot \underbrace{g(y)}_{= f(\frac{L}{\pi}y + a)} dy$$

$$\overset{x = \frac{L}{\pi}y + a}{=} \frac{2}{\pi} \int_a^{L+a} \cos\left(\pi k \frac{x-a}{L}\right) f(x) \frac{\pi}{L} dx$$

$$\Rightarrow \quad a_k = \frac{2}{L} \int_a^b \cos\left(\pi k \frac{x-a}{L}\right) f(x)\, dx \,\Big|_{L=b-a}$$

Lisäksi kaikissa f:n jatkuvuuspisteissä x pätee

$$f(x) = g\left(\frac{\pi}{L}(x-a)\right) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\left(\pi k \frac{x-a}{L}\right)$$

Saatiin siis haluttu cos-esitys funktiolle f. Hintana tälle oli cos-termien määrän "tuplautuminen": huomaa, että f:n trigonometrisessa sarjassa käytettäisiin funktioita $\cos\left(2\pi k \frac{x-a}{L}\right)$ ja $\sin\left(2\pi k \frac{x-a}{L}\right)$.
!

b) f:n sini-sarja saadaan täysin identtisesti, käyttäen paritonta jatketta, eli asettamalla $g(-y) = -g(y)$ yllä. Lopputulos on f:n jatkuvuuspisteissä x sini-esitys:

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin\left(k\pi \frac{x-a}{L}\right), \quad \text{jossa}$$

$$b_k = \frac{2}{L} \int_a^b \sin\left(\pi k \frac{x-a}{L}\right) f(x)\, dx \,\Big|_{L=b-a} .$$

* Mitä hyötyä sini- tai kosinisarjoista sitten on?

Niiden avulla voidaan esittää paremmin funktioita joiden halutaan toteuttavan tiettyjä reunaehtoja:

a) Jos $\sum_{k=1}^{\infty} |b_k| < \infty$, on sini-sarjan tuottama funktio $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(k\pi \frac{x-a}{L})$ aina jatkuva, ja se toteuttaa ns. Dirichlet'n reunaehdot:

$$f(a) = 0 = f(b).$$

b) Jos $\sum_{k=1}^{\infty} |k a_k| < \infty$ on cos-sarjan tuottama funktio jatkuvasti derivoituva, ja se toteuttaa ns. Neumannin reunaehdot:

$$f'(a) = 0 = f'(b).$$

(Syy: cos-sarjan derivaatta tuottaa sin-sarjan.)

c) Palautetaan vielä mieliin tavallisen Fourier'n sarjan vastaava ominaisuus: Jos sarja on itseisesti suppeneva, on f jatkuva ja toteuttaa ns. periodiset reunaehdot: $f(a) = f(b)$.

* Lisäksi voidaan sin- tai cos-sarjoihin siirtymällä joskus parantaa sarjan konvergenssia: ks. seuraava esimerkki:

Esim. 5.3: Laske funktion $f(x)=x$ kosinisarja välillä $[0,\pi]$.

Nyt $a=0$, $b=\pi \Rightarrow L=\pi$ ja lasketaan

$$a_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(kx)\, x\, dx, \quad \text{kun } k\neq 0, \text{ on } a_k =$$

osittaisint.

$$= \frac{2}{\pi}\left[\Big/_0^{\pi} \frac{1}{k}\sin(kx)\, x - \int_0^{\pi} \frac{1}{k}\sin(kx)\cdot 1\, dx \right]$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[0 - 0 - \Big/_0^{\pi} \frac{1}{k^2}(-\cos kx) \right]$$

$$= \frac{2}{\pi k^2}(\cos \pi k - 1) = \frac{2}{\pi k^2}((-1)^k - 1)$$

$$\Rightarrow a_k = \begin{cases} -\frac{4}{\pi k^2}, & k \text{ pariton} \\ 0, & k \text{ parillinen.} \end{cases}$$

Lisäksi $a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\, dx = \frac{2}{\pi} \Big/_0^{\pi} \frac{1}{2}x^2 = \pi$,

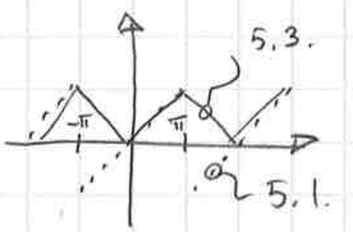
joten saadaan cos-sarjaesitys ($k = 2n+1$, $n=0,1,\ldots$)

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos((2n+1)x)}{(2n+1)^2}, \quad x \in [0,\pi].$$

Huomioita: * Sarjan termit ovat $O(n^{-2})$, joten sarja on itseisesti summautuva.

* Vrt. Esim. 5.1. jos $f(x)=x$ esitettiin välillä $[-\pi,\pi]$ Fourier'n sarjana, joka ei ollut kaikkialla itseisesti suppeneva, kertoimet silloin vain $O(n^{-1})$ kun $n\to\infty$.

* Tämän voi ymmärtää, kun huomaa, että Esim. 5.3. parillinen jatke on funktio $h(x)=|x|$ välillä $[-\pi,\pi]$. Koska $h(-\pi)=h(\pi)$, on h:n 2π-periodinen jatke jatkuva, päinvastoin kuin Esim. 5.1:n periodinen jatke.



5.2. Ortogonaaliset ja ortonormitetut funktiojoukot

Edellä nähtiin, että Dirichlet'n ehdon toteuttaville funktioille niiden Fourier'n sarja suppenee kaikissa pisteissä, joskaan ei aina kohti alkuperäisen funktion arvoa. Itse asiassa tällaisen "pisteittäisen suppenemisen" vaatiminen rajoittaa turhan paljon Fourier'n sarjojen käyttöä. Osoittautuu, että on paljon kätevämpää tutkia sarjan suppenemista ns. L^2-normissa, eli "neliöllistä virhettä", käyttäen:

Määritellään

1) $\|f\| := \sqrt{\int |f(x)|^2\,dx}$ = "f:n L^2-normi"

2) $L^2 :=$ {"niiden funktioiden f kokoelma, joille $\|f\| < \infty$"}

3) Kun $f, g \in L^2$ on niiden välinen <u>etäisyys</u> $= \|f-g\|$.

* Integrointi voi yllä tapahtua minkä tahansa joukon E yli, jolle integraali on ylipäätään määritelty. Yleensä E lisätäänkin kohdan "2)" merkintään, eli

$$L^2(\mathbb{R}) = \{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \mid \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2\,dx < \infty \}$$

ja $L^2([-\pi,\pi]) = \{ f : [-\pi,\pi] \to \mathbb{C} \mid \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2\,dx < \infty \}$.

* "1)":n normi on tavallaan luonnollinen yleistys $\mathbb{R}^N$:n vektorien pituudesta:

Jos $y \in \mathbb{R}^N$, on $|y| = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} |y_i|^2}$.

Tarkaavaisimmat ovat ehkä huomanneet ongelman, joka liittyy määritelmään 1) : on paljon funktioita f, joille $\|f\| = 0$. Itse asiassa, kun $f, g \in L^2$ määritelläänkin, että

1a) "$f = 0$" $\Leftrightarrow$ $\|f\| = 0$, jolloin sanotaan, että "$f = 0$ melkein kaikkialla"

2a) "$f = g$" $\Leftrightarrow$ $\|f - g\| = 0$, eli "$f = g$ melkein kaikkialla".

* HUOM: Y.o. integraalien arvot säilyvät ennallaan, jos integrandia muutetaan äärellisen monessa (MAT: tai numeroituvan monessa) pisteessä. Saadaan siis erityisesti, että

Jos $f, g \in L^2$ ja $f(x) = g(x)$, lukuun ottamatta äärellisen monta arvoa x, on $f = g$, joukon L^2 mielessä.

MAT) Matematiikassa määritelläänkin joukon L^2 alkioiksi ym. funktioiden ekvivalenssirelaation "$f = g$ melkein kaikkialla" ekvivalenssiluokat.

* Mitä tapahtuu, jos kertoimien $\mathcal{F}(k)$ määräämä Fourier'n sarja suppenee kohti funktiota $f \in L^2([0, 2\pi])$ L^2-normissa? Eli tarkemmin, jos funktioille

$$S_N(x) = \sum_{k=-N}^{N} \mathcal{F}(k) e^{ikx}, \quad x \in [0, 2\pi]$$

pätee

$$\|f - S_N\| \to 0 \quad \text{kun } N \to \infty \text{ ?}$$

Otetaan avuksi Hölderin epäyhtälö, jonka mukaan aina pätee

$$\int |F(x)G(x)|\, dx \le \sqrt{\int |F(x)|^2 dx} \sqrt{\int |G(x)|^2 dx}$$

Näin ollen rajafunktion f Fourier-kertoimille $\hat{f}(k)$ pätee

$$\hat{f}(k) = \int_0^{2\pi} e^{-ikx} f(x) \frac{dx}{2\pi} = \sum_{k'=-N}^{N} \psi(k') \int_0^{2\pi} e^{i(k'-k)x} \frac{dx}{2\pi}$$

$$+ \int_0^{2\pi} e^{-ikx} (f(x) - S_N(x)) \frac{dx}{2\pi}$$

Prujujen s. 96 tuloksen mukaan

(OG) $$\int_0^{2\pi} e^{i(k'-k)x} \frac{dx}{2\pi} = \mathbb{1}(k'=k) = \begin{cases} 1, & \text{jos } k'=k \\ 0, & \text{jos } k' \neq k \end{cases}$$

Tästä käytetään usein lyhennettä "$\delta_{k'k}$", jota kutsutaan Kroneckerin deltaksi.

Näin ollen 1. termissä vain yksi termi eroaa nollasta, kun $N > |k|$, ja summan arvo on tällöin $= \psi(k)$.

Toisaalta, Hölderin epäyhtälön perusteella:

$$\left| \int_0^{2\pi} e^{-ikx} (f(x) - S_N(x)) dx \right| \le \sqrt{\int_0^{2\pi} 1\, dx} \sqrt{\int_0^{2\pi} |f(x) - S_N(x)|^2 dx}$$

$$= \sqrt{2\pi} \cdot \| f - S_N \| \to 0 \text{ kun } N \to \infty.$$

$\therefore\ \hat{f}(k) = \psi(k)\ \forall k \in \mathbb{Z}$. Eli ψ:n määräämä sarja onkin taas sama kuin f:n Fourier'n sarja.

* Itse asiassa, voidaan osoittaa, että sama toimii myös toisin päin, eli jos $f \in L^2([0,2\pi])$, suppenee sen Fourier'n sarja L^2-normissa. Käänteiskaava

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}(k) e^{ikx}$$ pätee melkein kaikilla x.