Suoraviivainen tapaus: $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\kappa(k)| < \infty$

Jos $\sum_k |\kappa(k)| < \infty$, on sarja

$$f(x) := \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{ixk} \kappa(k)$$

itseisesti suppeneva kaikilla $x \in \mathbb{R}$.

* Lisäksi f on 2π-periodinen:

$$f(x+2\pi) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{ixk} \underbrace{e^{i2\pi k}}_{=1} \kappa(k) = f(x).$$

* Toisaalta prujun s. 50 tuloksen 2a)-mukaan:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \kappa(k) \lim_{x \to x_0} e^{ixk}$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \kappa(k) e^{ix_0 k} = f(x_0),$$ joten

näin saatu f on aina jatkuva.
(MAT: perustui dominoidun konvergenssin lauseeseen.)

* Käänteismuunnoksen integraali siis suppenee ja

$$(\mathcal{F}f)(k) := \int_0^{2\pi} \frac{dx}{2\pi} e^{-ikx} \sum_{k'=-\infty}^{\infty} \kappa(k') e^{ixk'}$$

ks. s. 50: 1b

$$\stackrel{!}{=} \sum_{k'=-\infty}^{\infty} \kappa(k') \int_0^{2\pi} \frac{dx}{2\pi} e^{ix(k'-k)}$$

Jos $k' \neq k$, on tässä $\int_0^{2\pi} dx\, e^{ix(k'-k)} = \Big/_0^{2\pi} \frac{1}{i(k'-k)} e^{ix(k'-k)}$

$$= \frac{1}{i(k'-k)} \left[e^{i2\pi(k'-k)} - 1 \right] = 0.$$

Jos $k' = k$, on $\int_0^{2\pi} dx\, e^{ix(k'-k)} = \int_0^{2\pi} dx = 2\pi.$

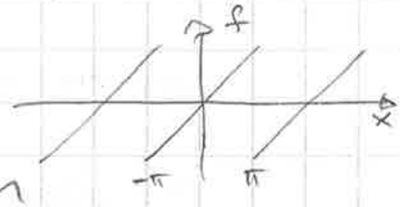
$$\Rightarrow \quad (\mathcal{F}f)(k) = \sum_{k'=-\infty}^{\infty} \hat{f}(k')\, \mathbb{1}(k'=k) = \hat{f}(k).$$

Itse asiassa pätee:

> Jos funktio f on 2π-periodinen ja jatkuva, ja sen Fourier-kertoimet ovat itseisesti summautuvia, toimii käänteiskaava kaikissa pisteissä, eli
>
> $$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{ixk} \hat{f}(k), \quad x \in \mathbb{R}.$$

* Jos $\sum_k |\hat{f}(k)| = \infty$, voi käänteiskaavassa tulla ongelmia, eikä se välttämättä anna takaisin funktion f arvoja joka pisteessä (ks. alla Esim. 5.1.)

* Huomataan myös, että jos f on epäjatkuva, ei sen Fourier-sarja voi supeta itseisesti kohti funktiota f.
* Huom: Koko periodisen funktion f pitää olla jatkuva, erityisesti siis välin $[0, 2\pi]$ päätepisteissä pitää olla $f(2\pi^-) = f(2\pi^+) = f(0^+)$. Vrt. seuraava esimerkki:



Kirjan Esim. 5.1.: Laske funktion

$f(x) = x$, $x \in (-\pi, \pi]$ (periodisen jatkeen) Fourier sarja.

Mille tahansa 2π-periodiselle funktiolle g pätee

$$\int_0^{2\pi} g(x)\,dx = \int_0^{\pi} g(x)\,dx + \underset{y = x - 2\pi}{\int_{\pi}^{2\pi} g(x)\,dx} = \int_0^{\pi} g(x)\,dx + \int_{-\pi}^{0} \underbrace{g(y+2\pi)}_{=g(y)}\,dy$$

$$\Rightarrow \int_0^{2\pi} g(x)\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} g(x)\,dx.$$

f:n Fourier-kertoimet ovat siis

$$(\mathcal{F}f)(k) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-ikx} x\,dx$$

Kun $k \neq 0$, saadaan siis osittaisintegroimalla

$$(\mathcal{F}f)(k) = \frac{1}{2\pi}\left[\Big/_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{-ik} e^{-ikx} x - \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{-ik} e^{-ikx} \cdot 1 \right]$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{i}{k}\left(\pi e^{-ik\pi} - (-\pi) e^{ik\pi}\right) - \frac{i}{k} \underbrace{\Big/_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{-ik} e^{-ikx}}_{=0} \right]$$

$$= \frac{i}{\cancel{2\pi} k} \cdot (-1)^k \cdot \cancel{2\pi} = i\,\frac{(-1)^k}{k}$$

Lisäksi $(\mathcal{F}f)(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\,dx = 0$.

Näistä saadaan siis Fourier-sarja

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} (\mathcal{F}f)(k) e^{ikx} = \sum_{k=1}^{\infty} i\,\frac{(-1)^k}{k} e^{ikx} + \sum_{\substack{k=-\infty \\ k'=-k}}^{-1} i\,\frac{(-1)^k}{k} e^{ikx}$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}\, i\, \underbrace{\left(e^{ikx} - e^{-ikx}\right)}_{=2i\sin(kx)}$$

$$= 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \sin(kx).$$

Milloin suppenee kohti arvoa $f(x)$?

Vastaus löytyy Dirichlet'n lauseesta:

(99)

Dirichlet'n lause

Oletetaan, että f on 2π-periodinen reaalifunktio, joka toteuttaa **Dirichlet'n ehdon**:

1) Funktiolla on vain äärellinen määrä epäjatkuvuuspisteitä välillä $[0, 2\pi]$, ja jokaisessa epäjatkuvuuspisteessä x_0 ovat vasemmalta ja oikealta otetut raja-arvot olemassa, eli löytyy

$$f(x_0^-) := \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{\substack{x \to x_0, \\ x < x_0}} f(x),$$

ja $$f(x_0^+) := \lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x)$$

2) Funktiolla f on vain äärellinen määrä paikallisia ääriarvokohtia (maksimeja ja minimejä) välillä $[0, 2\pi]$.
(Eli se ei saa oskilloida liian paljon.)

Tällöin f:n Fourier-sarja

$$S(x) := \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{ixk} \hat{f}(k), \quad \text{jossa}$$

$$\hat{f}(k) := \int_0^{2\pi} e^{-ikx} f(x) \frac{dx}{2\pi}, \quad k \in \mathbb{Z},$$

suppenee kaikilla x.

a) Jos x on piste, jossa f on jatkuva, pätee

$$S(x) = f(x).$$

b) Jos x on f:n epäjatkuvuuspiste, pätee

$$S(x) = \frac{1}{2}\left[f(x^-) + f(x^+) \right]$$
$$= \text{"epäjatkuvuuden puolivälin arvo"}$$

* Yleensä f on annettu vain, jollain välillä $[a, a+2\pi)$ tai $(a, a+2\pi]$, $a \in \mathbb{R}$, ja se jatketaan 2π-periodiseksi kaavan $f(x+2\pi n) = f(x)$, $n \in \mathbb{Z}$, avulla. Tällöin tulee välin päätepisteisiin usein epäjatkuvuuskohta. Esimerkiksi yllä esim. 5.1:ssä on $f(x) = x$, kun $x \in (-\pi, \pi]$, joten sen periodinen jatke on jatkuva kaikilla $x \in (-\pi, \pi)$. Sen sijaan pisteessä π saadaan

$$f(\pi^-) = \text{vasen raja-arvo} = \lim_{x \to \pi^-} f(x) = \lim_{x \to \pi} x = \pi$$

ja $$f(\pi^+) = \text{oikea raja-arvo} = \lim_{x \to \pi^+} f(x) = \lim_{x \to \pi} (x - 2\pi) = -\pi.$$

Näin ollen $f(\pi^-) \neq f(\pi^+)$, joten π on f:n epäjatkuvuuspiste. Koska $f(\pi^-) + f(\pi^+) = 0$, ja f toteuttaa Dirichlet ehdon, saadaan siis Esim. 5.1:n sarjalle, että se suppenee kaikkialla, ja erityisesti pätee

$$2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \sin(kx) = \begin{cases} x, & \text{kun } x \in (-\pi, \pi) \\ 0, & \text{kun } x = \pm\pi. \end{cases}$$

* Dirichlet'n lausetta voi soveltaa myös kun f on kompleksiarvoinen. Tällöin vaaditaan, että f:n reaali- ja imaginaariosa molemmat toteuttavat Dirichlet'n ehdon.

* Kun pyydetään laskemaan "funktion f Fourier-sarja välillä $[a, a+2\pi]$" tarkoitetaan sillä funktion F Fourier-sarjaa, jossa $F(x) = f(x)$ kun $a < x \leq a+2\pi$ ja F jatketaan muille arvoille 2π-periodisesti

(Tässä ei ole väliä kumpi päätepistearvo funktioon F sisällytetään; a vai $a+2\pi$: Fourier-kertoimet ovat molemmilla vaihtoehdoilla samat.)

* Esim. 5.2: Laske funktion $f(x) = x^2$ Fourier-sarja välillä $[-\pi, \pi]$.

Kuten Esim. 5.1:ssä, voidaan taas osittaisintegroida, kun $k \neq 0$: tällöin

$$\hat{f}(k) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ikx} x^2 \frac{dx}{2\pi}$$

$$= \Big/_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2\pi} \frac{1}{-ik} e^{-ikx} x^2 - \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\cancel{2}\pi} \frac{1}{-ik} e^{-ikx} \cancel{2} x \, dx$$

$$= \frac{i}{2\pi k} \Big[\overbrace{e^{-ik\pi}}^{=(-1)^k} \pi^2 - \overbrace{e^{ik\pi}}^{=(-1)^k} (-\pi)^2 \Big]$$

$$+ \frac{1}{i\pi k} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ikx} x \, dx$$

$$= 0 + \frac{1}{i\pi k} \Big[\Big/_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{-ik} e^{-ikx} x - \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{-ik} e^{-ikx} dx}_{=0} \Big]$$

$$= \frac{1}{\pi k^2} \Big[\pi e^{-ik\pi} - (-\pi) e^{+ik\pi} \Big]$$

$$= \frac{1}{k^2} \Big[(-1)^k + (-1)^k \Big] = 2 \frac{(-1)^k}{k^2}.$$

Toisaalta

$$\hat{f}(0) = \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \frac{dx}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \Big/_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{3} x^3 = \frac{1}{6\pi} \left(\pi^3 - (-\pi)^3 \right)$$

$$= \frac{\pi^2}{3}.$$

Näin ollen haluttu Fourier-sarja on

$$S(x) = \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{\infty} e^{ikx} \, 2 \frac{(-1)^k}{k^2} + \frac{\pi^2}{3}$$

$$= \frac{\pi^2}{3} + 2 \Big(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{ikx} (-1)^k}{k^2} + \sum_{\substack{k'=1 \\ (k'=-k)}}^{\infty} e^{-ik'x} \frac{(-1)^{-k'}}{(-k')^2} \Big)$$

$$= \frac{\pi^2}{3} + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} \left(e^{ikx} + e^{-ikx} \right)$$

$$\Rightarrow S(x) = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2}\cos(kx)$$

Koska $f(-\pi) = \pi^2 = f(\pi)$, toteuttaa f:n periodinen jatke Dirichlet'n ehdon ilman epäjatkuvuuskohtia. Saadaan siis $S(x) = x^2 \ \forall x \in [-\pi, \pi]$.

Erityisesti $S(0) = 0 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2}$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2} = \frac{\pi^2}{12}.$$

Saadaan myös $S(\pi) = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} \overbrace{\cos(k\pi)}^{=(-1)^k}$
$= \pi^2$

$$\Rightarrow \zeta(2) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{1}{4}\left(\pi^2 - \frac{\pi^2}{3}\right) = \frac{\pi^2}{6}.$$

Saatiin samalla siis laskettua yksi Riemannin ζ-funktion arvo.

Trigonometriset sarjat

Jos f:llä on Fourier-sarjaesitys, on sillä myös esitys trigonometristen funktioiden $\cos(kx)$ ja $\sin(kx)$ sarjana. Nimittäin Eulerin kaavaa $e^{ikx} = \cos kx + i \sin kx$ käyttämällä saadaan

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}(k)e^{ikx} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}(k)\cos kx + i\sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}(k)\sin kx$$

$$= \hat{f}(0) + \sum_{k=1}^{\infty} \hat{f}(k)\cos kx + \sum_{\substack{k'=1 \\ k'=-k}}^{\infty} \hat{f}(-k')\cos(-k'x)$$

$$+ i\left[\sum_{k=1}^{\infty} \hat{f}(k)\sin kx + \sum_{k'=1}^{\infty} \hat{f}(-k')\sin(-k'x)\right]$$

$$= \hat{f}(0) + \sum_{k=1}^{\infty} \left[a_k \cos kx + b_k \sin kx \right]$$

jossa $a_k = \hat{f}(k) + \hat{f}(-k)$

ja $b_k = i\left(\hat{f}(k) - \hat{f}(-k)\right)$.

* Tämä esitys on kätevä erityisesti, jos f on reaaliarvoinen funktio. Tällöin on siis $f(x)^* = f(x)\ \forall x$, joten

$$\hat{f}(k)^* = \int_0^{2\pi} \left(e^{-ikx} f(x)\right)^* \frac{dx}{2\pi}$$

$$= \int_0^{2\pi} e^{ikx} f(x)^* \frac{dx}{2\pi} = \int_0^{2\pi} e^{ikx} f(x) \frac{dx}{2\pi} = \hat{f}(-k).$$

$\Rightarrow$

$$a_k = \hat{f}(k) + \hat{f}(k)^* = 2 \,\mathrm{Re}\, \hat{f}(k) \in \mathbb{R}$$

ja $b_k = i\left(\hat{f}(k) - \hat{f}(k)^*\right) = -2 \,\mathrm{Im}\, \hat{f}(k) \in \mathbb{R}$

ja $\hat{f}(0) = \hat{f}(-0) = \hat{f}(0)^* \Rightarrow \hat{f}(0) \in \mathbb{R}$,

eli kaikki trigonometrisen sarjan kertoimet ovat myös reaalisia.

* Itse asiassa, sama pätee myös toisin päin:

Jos $\hat{f}(k)^* = \hat{f}(-k)\ \forall k$

$\Rightarrow S(x) = \sum_k e^{ixk} \hat{f}(k) \in \mathbb{R}\ \forall x$.

(Sillä $S(x)^* = \sum_k e^{-ixk} \hat{f}(-k) = S(x)$.)

* Kertoimet a_k, b_k saadaan myös suoraan integroimalla, ilman että tarvitsee laskea Fourier-kertoimia $\hat{f}(k)$. Nimittäin, kun $k \geq 1$

$$a_k = \hat{f}(k) + \hat{f}(-k) = \int_0^{2\pi} \underbrace{(e^{-ikx} + e^{ikx})}_{= 2\cos kx} f(x) \frac{dx}{2\pi}$$

$$= \int_0^{2\pi} \cos kx \cdot f(x) \frac{dx}{\pi}$$

ja $b_k = i\left(\hat{f}(k) - \hat{f}(-k)\right) = \int_0^{2\pi} i \overbrace{(e^{-ikx} - e^{ikx})}^{= -2i\sin(kx)} f(x) \frac{dx}{2\pi}$

$$= \int_0^{2\pi} \sin kx \cdot f(x) \frac{dx}{\pi}.$$

* Usein määritellään myös

$$a_0 := \int_0^{2\pi} \cos(0x) f(x) \frac{dx}{\pi} = \int_0^{2\pi} f(x) \frac{dx}{\pi} = 2\hat{f}(0)$$

jolloin $\hat{f}(0) = \frac{a_0}{2}$ on trigonometrisen sarjan vakiotermi.

* Huomaa, että integrandi a_k:in ja b_k:in määritelmässä on 2π-periodinen. Näin ollen voidaan myös kirjoittaa

$$a_k = \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \, f(x) \frac{dx}{\pi}, \quad b_k = \int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \, f(x) \frac{dx}{\pi}.$$

a) Näin ollen, jos f on parillinen funktio,

on integrandi $\sin kx \cdot f(x)$ pariton $\Rightarrow b_k = 0 \ \forall k$.

$\Rightarrow$ f:n Fourier-sarja sisältää vain cos-termejä:

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx$$

b) Jos f on <u>pariton</u>, on sitä myös integrandi $\cos kx \cdot f(x) \Rightarrow a_k = 0 \ \forall k$.

$\Rightarrow$ Fourier-sarja sisältää vain sin-termejä

$$= \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx.$$

* Tämä selittää, miksi Esim. 5.1. saatiin pelkästään sin-termejä sisältävä reaalinen sarja ($f(x) = x$, $|x| < \pi$, on pariton reaalinen funktio) ja Esim. 5.2:ssa reaalinen cos-termejä sisältävä sarja ($f(x) = x^2$, $|x| < \pi$, on parillinen reaalinen funktio.)

<u>L-periodisen funktion Fourier-sarja</u>

* Entä, jos f onkin L-periodinen, $L \neq 2\pi$? Voidaanko tällöin f kehittää Fourier-sarjaksi joka "toimii" kaikkialla?

* Kyllä, helpostikin:

Määritellään apufunktio $g(y) = f\left(\frac{L}{2\pi} y\right)$, $y \in \mathbb{R}$.

Tällöin $g(y + 2\pi) = f\left(\frac{L}{2\pi}(y + 2\pi)\right)$

$$= f\left(\frac{L}{2\pi} y + L\right) \overset{f = L\text{-periodinen}}{=} f\left(\frac{L}{2\pi} y\right) = g(y)$$

eli g onkin 2π-periodinen. Sen Fourier-sarja on

$$s(y) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{iky} \hat{g}(k), \quad \text{jossa}$$

$$\hat{g}(k) = \int_0^{2\pi} e^{-iky} g(y) \frac{dy}{2\pi} = \int_0^{2\pi} e^{-iky} f\left(\frac{L}{2\pi} y\right) \frac{dy}{2\pi}$$

$$x = \frac{L}{2\pi} y$$