Kertausta MAPUsta:

Parillisten ja parittomien funktioiden integrointi symmetrisen välin yli:

Määr. a) f on parillinen funktio, jos

$$f(-x) = f(x).$$

b) f on pariton funktio, jos

$$f(-x) = -f(x).$$

Näille pätee: (alla $\delta > 0$)

1) Jos f on parillinen,

$$\int_{-\delta}^{\delta} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{\delta} f(x)\,dx$$

ja $$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{\infty} f(x)\,dx.$$

2) Jos f on pariton

$$\int_{-\delta}^{\delta} f(x)\,dx = 0 = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$$

Syy: $$\int_{-\delta}^{\delta} f(x)\,dx = \int_{0}^{\delta} f(x)\,dx + \int_{-\delta}^{0} f(x)\,dx \Big|_{y=-x}$$

$$= \int_{0}^{\delta} f(x)\,dx + \int_{0}^{\delta} f(-y)\,dy.$$

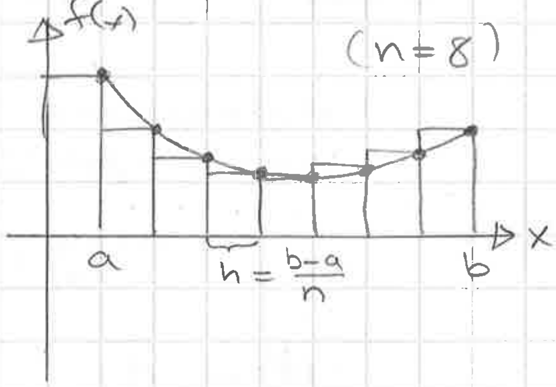
$\Rightarrow$ 1) ja 2).

## Lisä) Eulerin-Maclaurinin summakaava

Käytetään tarkkuuden parantamiseen, kun integraalia approksimoidaan summilla (tai päinvastoin):

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx h \sum_{j=1}^{n} f(a+(j-1)h) \quad \Big| \; h = \frac{b-a}{n}$$

(n = 8)




*Korjaustermit sisältävät f:n derivaattoja päätepisteissä a, b:

$$\sum_{j=1}^{n} f(a+(j-1)h) = \frac{1}{h}\int_a^b f(x)\,dx$$
$$-\frac{1}{2}\left[f(b)-f(a)\right] + \frac{1}{12}h\left[f'(b)-f'(a)\right]$$
$$+ A_4 h^3\left[f^{(3)}(b)-f^{(3)}(a)\right]$$
$$+ \dots + A_{2m} h^{2m-1}\left[f^{(2m-1)}(b)-f^{(2m-1)}(a)\right]$$
$$+ R_m ,$$

jossa korjaustermi on muotoa

$$R_m = \theta A_{2(m+1)} h^{2m+1}\left[f^{(2m+1)}(b)-f^{(2m+1)}(a)\right]$$

jollakin $0 < \theta < 1$. Kaavassa esiintyvät vakiot ovat

$$A_{2k} := (-1)^{k-1}\frac{B_k}{(2k)!}, \quad \text{jossa}$$

$B_k$ ovat ns. Bernoullin lukuja. $(B_1 = \frac{1}{6}, B_2 = \frac{1}{30}, \dots)$

* Antaa yleensä pelkästään asymptoottisen kehitelmän, eli $R_m$ alkaa lopulta kasvaa, kun $m \to \infty$.
* Lisätietoja: - Wikipedia
  - Honkonen, s. 98 - 102
  - Arfken, s. 380 - 382
* Mistä kaava tulee? Palautetaan mieleen f:n Taylorin polynomi:

$$f(x) = f(x_0) + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + R_n$$

$\Rightarrow$

$$f(x_0+hu) = f(x_0) + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} u^k \cdot h^k + R_n$$

$$\Rightarrow \int_0^1 f(x_0+hu)\,du$$

$$= f(x_0) + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{(k+1)!} h^k + \int_0^1 R_n\,du, \quad (*)$$

Toisaalta $\int_0^1 f(x_0+hu)\,du \overset{x = x_0+hu}{=} \frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} f(x)\,dx$,

joten $\frac{1}{h}\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{j=1}^{n} \int_0^1 f(a+(j-1)h+hu)\,du.$

Tämän jälkeen voidaan derivaattojen $h^k f^{(k)}(x_0)$, $k=1,\dots$, Taylorin kehitelmistä saada aikaan yhtälöryhmä, päätearvojen erotusten $h^k[f^{(k)}(x_0+h) - f^{(k)}(x_0)]$ avulla. (ks. Honkonen s. 98). Kertoimiksi tulee vakiot $A_k$, joista $A_3, A_5, A_7, \dots$, ovat nollia. Summassa vain uloimmat päätearvot jäävät jäljelle, esim.

$$\sum_{j=1}^{n} [f'(a+(j-1)h+h) - f'(a+(j-1)h)]$$

$$= f'(a+nh) - f'(a)$$

$$= f'(b) - f'(a).$$

Jäännöstermi vaatii vähän tarkempaa analyysiä...

# Luku 5: Fourier'n sarja

## Johdantoa: Diskreetti Fourier-muunnos

Kuvaa kompleksilukuvektorin
$u = (u(0), \dots, u(N-1))$ vektoriksi
$Au := \hat{u} := (\hat{u}(0), \dots, \hat{u}(N-1))$ kaavalla

$$\hat{u}(n) := \sum_{k=0}^{N-1} e^{i2\pi \frac{k}{N} n} u(k).$$

Sen avulla voidaan ratkaista kaikki differentiaaliyhtälöt, jotka ovat muotoa

$$(*) \quad \partial_t f_t(k) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} g(m) f_t(k-m), \quad k \in \mathbb{Z},$$

kunhan $g(m) = 0$, aina kun $|m| \geq \frac{N}{2}$, ja

$f_0$ on N-periodinen: $f_0(k+N) = f_0(k)$.

Idea on sama kuin, millä seuraavan luvun Fourier-muunnoksella ratkaistaan osittaisdifferentiaaliyhtälöitä.

1) Havaitaan (laskuharjoitus), että kun $f$ on N-periodinen, pätee

$$\sum_{k=0}^{N-1} e^{i2\pi \frac{k}{N} \cdot n} \sum_m g(m) f(k-m) = \hat{g}(n) \hat{f}(n)$$

2) Näin ollen DY:n $(*)$ Fourier-muunnos on

$$\partial_t \hat{f}_t(n) = \hat{g}(n) \hat{f}_t(n),$$

jonka ratkaiseminen on suoraviivaista

$$\hat{f}_t(n) = e^{t\hat{g}(n)} \hat{f}_0(n).$$

3) Jos löytyisi käänteismuunnos $A^{-1}: \hat{\mathcal{U}} \to \mathcal{U}$ saadaan tästä suoraan yleinen ratkaisu

(94)

$$f_*(k) = (A^{-1}[e^{t\hat{g}} \hat{f}_0])(k), \quad k = 0, 1, \ldots, N-1$$

joka voidaan jatkaa $N$-periodiseksi funktioksi määrittelemällä $f_*(mN + k) = f_*(k)$ kun $m \in \mathbb{Z}$.

Onneksi käänteismuunnoskin löytyy helposti:

HT 2.1:ssä on näytetty, että funktiolle

$$\delta_N(k) := \sum_{n=0}^{N-1} e^{i2\pi nk/N}$$

pätee $\delta_N(k) = \begin{cases} 0, & \text{jos } k \neq mN, \ m \in \mathbb{Z} \\ N, & \text{jos } k = mN, \text{ jollakin } m \in \mathbb{Z}. \end{cases}$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{N-1} e^{-i2\pi \frac{k'}{N} \cdot n} \hat{u}(n)$$

$$= \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} e^{i2\pi \frac{k-k'}{N} n} u(k)$$

$$= \sum_{k=0}^{N-1} u(k)\, \delta_N(k-k') = N u(k') .$$

Tästä seuraa siis kaava käänteismuunnokselle

$$(A^{-1}\hat{u})(k') := \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} e^{-i2\pi \frac{k'}{N} \cdot n} \hat{u}(n).$$

* Voisiko tätä ideaa soveltaa myös, kun $N \to \infty$, jolloin periodisuusehto katoaa?

Itse asiassa kyllä: Rajalla $N \to \infty$ saadaan formaalisti kuvaukset (merk. $\mathcal{F}$ on $A^{-1}$:n raja)

$$(\mathcal{F}^{-1}u)(x) := \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{ixk}\, u(k), \quad x \in [0, 2\pi]$$

ja

$$(\mathcal{F}f)(k) := \int_0^1 dy\, e^{-i2\pi k y} f(2\pi y)$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} dx\, e^{-ikx} f(x), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

( Selitys rajanotolle: huomaa, että jos $N$ = parillinen,

$$\hat{u}(n) = \sum_{k=0}^{N/2} e^{i2\pi\frac{k}{N}\cdot n} u(k) + \sum_{\substack{k=N/2+1 \\ l=k-N}}^{N-1} e^{i2\pi\frac{k}{N}\cdot n} u(k)$$

$$= \sum_{k=0}^{N/2} e^{i2\pi\frac{k}{N}\cdot n} u(k) + \sum_{l=-N/2+1}^{-1} \underbrace{e^{i2\pi\frac{l+N}{N}\cdot n}}_{= e^{i2\pi\frac{l}{N}\cdot n}\underbrace{e^{i2\pi n}}_{=1}} \overbrace{u(l+N)}^{=u(l)}$$

$$= \sum_{k=-N/2+1}^{N/2} e^{i2\pi\frac{k}{N}\cdot n} u(k) \approx (\mathcal{F}^{-1}u)(\underbrace{2\pi\tfrac{n}{N}}_{\in[0,2\pi]}), \quad )$$

Tällöin sanotaan, että

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{ixk} u(k) \text{ on jonon } u \text{ \underline{Fourier-sarja}}$$

ja jono $(\mathcal{F}f)(k)$, $k \in \mathbb{Z}$, funktion $f$ <u>Fourier-kertoimet</u>.

* Milloin Fourier-sarja suppenee?

* Milloin $\mathcal{F}$ ja $\mathcal{F}^{-1}$ ovat toistensa käänteismuunnoksia?