Satulapistemenetelmä

Esimerkki: $\text{P.V.} \int_{-\infty}^{\infty} e^{g(x)}\,dx := \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} e^{g(x)}\,dx$

kun $g(z) := -i\frac{1}{2}z^2 + iz$.

* Koska $|e^{g(z)}| = e^{\operatorname{Re} g(z)}$ ja $\operatorname{Re} g(x) = 0$, kun $x \in \mathbb{R}$, on yo. integrandissa $|e^{g(x)}| = 1$.
$\Rightarrow$ integraali ei suppene itseisesti, mutta

$$I_R := \int_{-R}^{R} e^{g(x)}\,dx \quad \text{on hyvin määritelty.}$$

* Koska $e^{g(z)}$ on kokonainen funktio, voidaan integrointipolkua $\gamma_0(t) = t$, $t \in [-R, R]$, muokata vapaasti Cauchyn lausetta soveltaen:

Jos γ_1 on polku $-R \to R$, on polku $\gamma := \gamma_1 \dot{+} (-\gamma_0)$ suljettu polku, ja silloin

$$\oint_\gamma e^{g(z)}\,dz = 0 = \int_{\gamma_1} e^{g(z)}\,dz - \underbrace{\int_{\gamma_0} e^{g(z)}\,dz}_{= I_R}$$

$$\Rightarrow \quad I_R = \int_{\gamma_1} e^{g(z)}\,dz.$$

* Kokeillaan suoria pitkin kulkevaa polkua

$$\gamma(t) = c_0 + c_1 t, \quad c_0, c_1 \in \mathbb{C},\ |c_1| = 1 \quad (\Leftrightarrow |\gamma'(t)| = 1)$$
$$= x(t) + iy(t).$$

ja pyritään minimoimaan $\int_{-\infty}^{\infty} e^{\operatorname{Re} g(\gamma(t))}\,dt$

$$g(x+iy) = -i\tfrac{1}{2}(x+iy)^2 + i(x+iy)$$
$$= -i\tfrac{1}{2}(x^2 - y^2 + 2ixy) + ix - y$$

$$\Rightarrow \quad u(x,y) = \operatorname{Re} g(x+iy) = xy - y = y(x-1).$$

$$\Rightarrow \nabla u(x,y) = \begin{pmatrix} y \\ x-1 \end{pmatrix}.$$

* Gradientin nollakohdissa, $\nabla u = 0$, on u:n satulapiste. Pyritään valitsemaan polku siten, että se kulkee satulapisteen kautta ja vähenee mahdollisimman nopeasti siitä poistuttaessa.

$$\nabla u = 0 \iff y=0,\ x=1 \iff z = 1.$$

Olkoon siis $\gamma(0) = 1 \Rightarrow c_0 = 1$. Tällöin Taylorin lauseen mukaan (sovelletaan u:y:aan)

$$u(\gamma(t)) = u(\gamma(t_0)) + \frac{d}{ds}(u(\gamma(s)))\Big|_{s=t_0} \cdot (t-t_0) + O(t-t_0)^2$$

Koska $\frac{d}{ds}(u(\gamma(s))) = \sum_{j=1}^{2} \frac{d}{ds}\gamma^j(s) \cdot \partial_j u\big|_{\gamma(s)} = \dot\gamma(s) \cdot \nabla u\big|_{\gamma(s)}$

Saadaan nopein muutos valitsemalla polku γ kulkemaan u:n gradientin suuntaan.

Kuvasta nähdään (ks. kotisivut), että nyt haluttu nopeimman vähenemisen suunta on $-\frac{\pi}{4}$ (eli $-45°$).

$\Rightarrow$ kokeillaan siis suoraa $\gamma_2(t) = 1 + e^{-i\frac{\pi}{4}}t$.

$$\Rightarrow g(\gamma(t)) = -i\tfrac{1}{2}\left(1 + e^{-i\frac{\pi}{2}}t^2 + 2e^{-i\frac{\pi}{4}}t\right) + i\left(1 + e^{-i\frac{\pi}{4}}t\right)$$

$$= -\frac{i}{2} + i + \frac{1}{2}\cdot(-i)\cdot(-i)t^2 + it\left(-e^{-i\frac{\pi}{4}} + e^{-i\frac{\pi}{4}}\right)$$

$= \frac{i}{2} - \frac{1}{2}t^2$. Saadaan

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{g(\gamma_2(t))}\dot\gamma_2(t)\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{i}{2} - \frac{1}{2}t^2} e^{-i\frac{\pi}{4}}\,dt$$

$$= e^{i\left(\frac{1}{2} - \frac{\pi}{4}\right)} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}t^2}\,dt = \sqrt{2\pi}\, e^{i\left(\frac{1}{2} - \frac{\pi}{4}\right)},$$

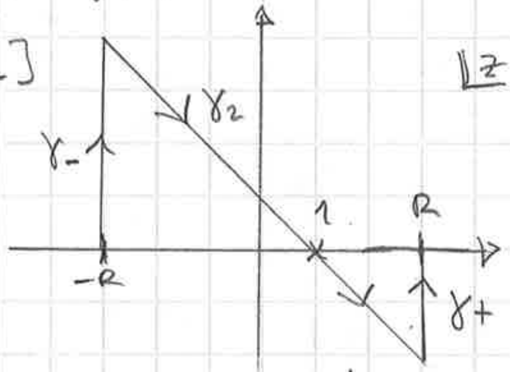
$$\text{sillä} \quad \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}t^2}\,dt = 2\int_0^{\infty} e^{-\frac{1}{2}t^2}\,dt \quad , \quad u = \tfrac{1}{2}t^2 \;\Rightarrow\; \frac{du}{dt} = t = \sqrt{2u}$$

$$= 2\int_0^{\infty} e^{-u}\frac{1}{\sqrt{2u}}\,du = \sqrt{2}\,\Gamma\left(\tfrac{1}{2}\right)$$

$$= \sqrt{2\pi}.$$

Kokeillaan siis muuntaa γ_0 kulkemaan suoraa γ_2 pitkin: $\gamma_1 = \gamma_- \dotplus \gamma_2 \dotplus \gamma_+$, kuten ao. kuvassa.

Tässä $\gamma_-(t) = -R + it$, $t \in [0, t_-]$
$\gamma_+(t) = R + it$, $t \in [-t_+, 0]$



jolloin

$$\left|\int_{\gamma_-} e^{g(z)}\,dz\right| = \left|\int_0^{t_-} e^{g(-R+it)}\,i\,dt\right| \le \int_0^{t_-} e^{u(-R,t)}\,dt = \int_0^{t_-} e^{-(R+1)t}\,dt$$

$$\le \int_0^{\infty} e^{-(R+1)t}\,dt = \frac{1}{R+1}.$$ Samalla tavalla

nähdään $$\left|\int_{\gamma_+} e^{g(z)}\,dz\right| = \left|\int_{-t_+}^{0} e^{g(R+it)}\,i\,dt\right|$$

$$\le \int_0^{t_+} e^{\mathrm{Re}\, g(R-is)}\,ds \le \int_0^{\infty} e^{-s(R-1)}\,ds = \frac{1}{R-1}$$

Näin ollen $$I_R = \int_{-R}^{R} e^{g(\gamma_2(t))}\,\dot\gamma_2(t)\,dt + \Delta_R,$$

jossa $$|\Delta_R| \le \frac{1}{R+1} + \frac{1}{R-1} = \frac{2R}{R^2-1} \longrightarrow 0 \quad \text{kun } R \to \infty.$$

$$\therefore \quad \lim_{R\to\infty} I_R = \int_{-\infty}^{\infty} e^{g(\gamma_2(t))}\,\dot\gamma_2(t)\,dt = \sqrt{2\pi}\,e^{i\frac{1}{2}\left(1-\frac{\pi}{2}\right)}.$$

* Lisätietoja: Liite kurssin kotisivuilla.

* Tavallisin sovellus satulapistemenetelmälle käsittelee tapausta:

$$F(N) = \int_{\gamma_0} g(z)\, e^{N f(z)}\, dz,$$

$N > 0$, g, f analyyttisiä alueessa Ω ja γ_0 = polku alueessa Ω.

Miten $F(N)$ käyttäytyy, kun $N \gg 1$?

* Nyt f analyyttinen $\Rightarrow$ $u = \mathrm{Re}\, f$ ja $v = \mathrm{Im}\, f$ toteuttavat CR-yhtälöt: kun $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$, pätee

$$\begin{cases} \mathrm{Re}\, f'(z) = \partial_x u = \partial_y v \\ \mathrm{Im}\, f'(z) = \partial_x v = -\partial_y u \end{cases}$$

* Integrandissa $|g e^{Nf}| = |g| e^{Nu}$, joten kun $N \gg 1$, u:n maksimi dominoi integrandin arvoja. Kuten edellä olleessa esimerkissä, pyritään tässäkin muokkaamaan polkua γ_0 Cauchyn lausetta käyttäen siten, että maksimi uudella polulla saavutetaan u:n satulapisteessä. (Huom: u:lla ei voi olla globaalia maksimia tai minimiä Ω:ssa.)

Satulapisteet ovat $z_0 = x_0 + iy_0$, joilla $\nabla u(x_0, y_0) = 0$. CR-yhtälöiden mukaan

$$\nabla u = 0 \iff \partial_x u = 0 = \partial_y u \iff f'(z_0) = 0,$$

[Eli satulapisteet löydetään ratkaisemalla analyyttisen funktion f kompleksiderivaatan nollakohdat.]

* CR-yhtälöistä seuraa lisäksi, että

$$\begin{aligned}\nabla u \cdot \nabla v &= \partial_x u \cdot \partial_x v + \partial_y u \cdot \partial_y v \\ &= \partial_x u \cdot (-\partial_y u) + \partial_y u \cdot \partial_x u = 0,\end{aligned}$$

joten $\nabla u \cdot \nabla v = 0$ kaikkialla. Lisäksi myös $\nabla v = 0 \iff f'(z_0) = 0$, joten satulapisteiden ulkopuolella muodostaa $\{\nabla u, \nabla v\}$ $\mathbb{R}^2$:n ortogonaalisen kannan.

* Kuten esimerkissä, etsitään polkua joka kulkee satulapisteen z_0 kautta ja u vähenee mahdollisimman nopeasti sen ympäristössä.
$\Rightarrow$ $\dot{\gamma}(t) \propto \nabla u|_{\gamma(t)}$ ja näin ollen

$$\frac{d}{dt} v(\gamma(t)) = \dot{\gamma}(t) \cdot \nabla v|_{\gamma(t)} = 0.$$

[$\Rightarrow$ käyrä γ kulkee pitkin imaginaariosan v tasa-arvokäyrää]

$$\begin{aligned}&\Rightarrow \operatorname{Im} f(\gamma(t)) = \operatorname{Im} f(\gamma(0)) \\ &\Rightarrow f(\gamma(t)) - f(\gamma(0)) = u(\gamma(t)) - u(\gamma(0)) \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

* Yleensä hankalaa integroida ym. "optimaalista" polkua pitkin: täytyy ratkaista joko yhtälö $v(\gamma(t)) = \operatorname{Im} f(z_0)$, tai diff. yhtälö

$$\frac{d}{dt}\gamma(t) = -\frac{\nabla u(\gamma(t))}{|\nabla u(\gamma(t))|} \quad (t \in [0, \alpha])$$

* Kun $N \gg 1$, yleensä riittää, että $\gamma(t)$ kulkee satulapisteen läpi "optimaaliseen suuntaan":
Oletetaan, että $\gamma(0) = z_0$ ja $f'(z_0) = 0$.
Merkitään $\gamma'(0) = e^{i\theta} \in \mathbb{C}$, $\theta \in \mathbb{R}$.
Kun $|t| \le \delta$, $\delta > 0$, saadaan

$$\gamma(t) = z_0 + t \cdot (e^{i\theta} + O(t))$$

$\Rightarrow$ f:n Taylorin kehitelmää soveltaen,

$$f(\gamma(t)) = f(z_0 + t(e^{i\theta} + O(t)))$$
$$= f(z_0) + t(e^{i\theta} + O(t)) \cdot \cancel{f'(z_0)} \;{=}0$$
$$+ \frac{1}{2} f''(z_0) t^2 (e^{i\theta} + O(t))^2 + O(t^3)$$

$$= f(z_0) + \frac{1}{2} t^2 e^{i2\theta} f''(z_0) + O(t^3)$$

Merk. $\boxed{\varphi_0 := \operatorname{Arg}(-f''(z_0))}$

$\Rightarrow e^{i2\theta} f''(z_0) = -|f''(z_0)|\, e^{i(2\theta + \varphi_0)}$

Saadaan $f(\gamma(t)) = f(z_0) - \frac{1}{2} t^2 |f''(z_0)| + O(t^3)$

Kun $2\theta + \varphi_0 = 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, $\Rightarrow \theta = -\frac{\varphi_0}{2} + \pi n$

$\Rightarrow \gamma'(0) = e^{i\theta} = e^{i\pi n} \cdot e^{-i\frac{\varphi_0}{2}} = (-1)^n \dfrac{1}{e^{i\frac{\varphi_0}{2}}}$

$= \pm \dfrac{1}{\sqrt{-f''(z_0) \cdot |f''(z_0)|^{-1}}}$. ($\sqrt{\ } =$ päähaara)

Merkki riippuu siitä kuljetaanko satulapisteen läpi "vasemmalta oikealle" (+) vai päinvastoin (-).

Lisä) $\operatorname{Re}(\gamma(t) - z_0) = t \operatorname{Re} e^{i\theta} + O(t^2)$,
jossa
$$\operatorname{Re} e^{i\theta} = \pm \cos\left(-\frac{\varphi_0}{2}\right) = \pm \cos \frac{\varphi_0}{2}.$$

Koska $|\varphi_0| \le \pi \Rightarrow \cos\frac{\varphi_0}{2} \ge 0$. Näin ollen kun $t \in [-\delta, \delta]$ kulkee $\gamma(t)$ "vasemmalta oikealle", kun valitaan "+"-merkki, ja "oikealta vasemmalle" kun valitaan "−".

Erityisesti, jos valitaan välillä $t \in [-\delta, \delta]$ polku suoraksi $\gamma_0(t) = z_0 + e^{i\theta} t$, saadaan tältä polun pätkältä integraali

$$I_{z_0} := \int_{\gamma_0} g(z) e^{Nf(z)} dz$$
$$= \int_{-\delta}^{\delta} g(z_0 + te^{i\theta}) e^{Nf(z_0+te^{i\theta})} e^{i\theta} dt$$
$$= \int_{-\delta}^{\delta} G(z_0+te^{i\theta}; N) e^{i\theta} e^{Nf(z_0)} g(z_0) e^{-\frac{1}{2}t^2|f''(z_0)|N}$$

kun $G(z;N) := \dfrac{g(z)}{g(z_0)} e^{N\left[f(z) - f(z_0) - \frac{1}{2} f''(z_0)(z-z_0)^2\right]}$

Kehitetään analyyttinen funktio G Taylorin sarjaksi pisteen $z = z_0$ ympärillä:

$$G(z) = \underbrace{G(z_0)}_{=1} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n(N)}{n!} (z-z_0)^n,$$

jossa $c_n(N) := G^{(n)}(z_0; N)$. Integrointipolulla

saadaan siis

$$I_{z_0} = e^{Nf(z_0)} g(z_0) \Big\{ \int_{-\delta}^{\delta} e^{-\frac{1}{2}t^2|f''(z_0)|N} e^{i\theta} dt$$
$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n(N)}{n!} \int_{-\delta}^{\delta} e^{i\theta(n+1)} t^n e^{-\frac{1}{2}t^2 N|f''(z_0)|} dt \Big\}$$

Lisä) Kun n pariton on tässä $\int_{-\delta}^{\delta} t^n e^{-\frac{1}{2}t^2 \cdots} dt = 0$, antisymmetrisyyden takia.

Kun $n = 2m$, saadaan

$$\int_{-\delta}^{\delta} t^n e^{-\frac{1}{2}t^2 N|f''(z_0)|} dt \overset{s = t\cdot\sqrt{N|f''(z_0)|}}{=}$$
$$= \left(\frac{1}{\sqrt{N|f''(z_0)|}}\right)^{2m+1} 2 \int_0^{\delta\sqrt{\cdot}} s^{2m} e^{-\frac{1}{2}s^2} ds$$

Lisä) Tässä $\int_0^M s^{2m} e^{-\frac{1}{2}s^2} ds \quad \Big| \; u = \frac{1}{2}s^2 \Rightarrow \frac{du}{ds} = s = \sqrt{2u}$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}M^2} \frac{1}{\sqrt{2u}} (2u)^m e^{-u} du = 2^{m-\frac{1}{2}} \int_0^{\frac{1}{2}M^2} u^{m-\frac{1}{2}} e^{-u} du$$

$$\approx 2^{m-\frac{1}{2}} \Gamma(m+\tfrac{1}{2}) \text{ kunhan } \tfrac{1}{2}M^2 \gg m - \tfrac{1}{2}$$

eli $\delta^2 N |f''(z_0)| + 1 \gg 2m = n$,

Näin ollen saadaan asymptoottinen kehitelmä

jossa $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n(N)}{n!} \int_{-\delta}^{\delta} \sim dt$ voidaan approksimoida

ottamalla jonkin verran termejä sarjasta

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{c_{2m}(N)}{(2m)!} \left(\frac{\pm\sqrt{2}}{\sqrt{-Nf''(z_0)}} \right)^{2m+1} \Gamma(m+\tfrac{1}{2})$$

jossa $\Gamma(m+\frac{1}{2}) = (m-\frac{1}{2}) \cdot (m-\frac{3}{2}) \cdots \Gamma(\frac{1}{2})$

$$= \frac{(2m-1)!!}{2^m} \sqrt{\pi}$$

$\Rightarrow$ sarja voidaan kirjoittaa myös muodossa

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{G^{(2m)}(z_0;N)}{N^{m+\frac{1}{2}}} \left(\frac{\pm 1}{\sqrt{-f''(z_0)}} \right)^{2m+1} \cdot \sqrt{2\pi} \frac{1}{(2m)!!}$$

* Kehitelmän johtava termi on

$$I_{z_0} \approx e^{Nf(z_0)} g(z_0) e^{i\theta} 2 \int_0^{\delta} e^{-\frac{1}{2}\underbrace{t^2 |f''(z_0)| N}_{=u^2,\; u = t\sqrt{N|f''(z_0)|}}} dt$$

$$= e^{Nf(z_0)} g(z_0) \frac{\pm 1}{\sqrt{-f''(z_0)} \cdot |\cancel{f''(z_0)}|^{-\frac{1}{2}}} \cdot 2 \frac{1}{\sqrt{N|\cancel{f''(z_0)}|}} \int_0^{\delta\sqrt{N|f''(z_0)|}} e^{-\frac{u^2}{2}} du$$

kun N suuri

$$\approx e^{Nf(z_0)} g(z_0) \frac{\pm 1}{\sqrt{-f''(z_0)}} \frac{2}{N^{1/2}} \cdot \underbrace{\int_0^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} du}_{= \frac{\sqrt{2\pi}}{2}}$$

$$\Rightarrow \quad I_{z_0} \approx e^{Nf(z_0)}\, g(z_0) \sqrt{\frac{2\pi}{-Nf''(z_0)}} \cdot (\pm 1)$$

* Tätä kaavaa käytetään yleensä suoraan satulapisteen z_0 kontribuution approksimaationa.

* Jos satulapisteitä on polulla γ useita, saadaan siis

$$\int_\gamma g(z)\, e^{Nf(z)}\, dz \approx \sum_{z_0} I_{z_0}$$

kunhan polku γ kulkee kunkin satulapisteen kautta "oikeaan", eli suurimman vähenemisen, suuntaan.

* Honkonen: Esimerkki 4.4. = Stirlingin kaava.
(Muuttujanvaihto $t = nu \Rightarrow$ saadaan
$f(t) = -t + \ln t$, jolle $f'(t) = -1 + \frac{1}{t}$.

Näin ollen $f'(z_0) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{z_0} = 1 \Rightarrow z_0 = 1$.

$$\Rightarrow f''(z_0) = -\frac{1}{z_0^2} = -1 \Rightarrow -f''(z_0) = 1.$$

$\Rightarrow \varphi_0 = 0$ ja valitaan $\theta = 0$, eli
$\gamma(t) = 1 + t$, $t \in [-1, \infty)$.

$$\Rightarrow \quad \Gamma(n+1) = n^{n+1} \int_0^\infty e^{nf(u)}\, du$$

$$\approx n^{n+1} e^{nf(1)} \sqrt{\frac{2\pi}{n}} = n^n \cdot e^{-n} \sqrt{2\pi n}$$

Ja kun $n \in \mathbb{N}$, $n \gg 1$, tästä seuraa

$$\Gamma(n+1) = n! \approx n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}.$$

= Stirlingin kaava.)