Yhteenveto satulapistemenetelmästä

Integraalien

$$F(N) = \int_{\gamma_0} g(z)\, e^{N f(z)}\, dz$$

$N \to \infty$ asymptotiikkaa laskettaessa:

1) Ratkaistaan satulapisteet z_0, eli kaikki yhtälön

$$f'(z_0) = 0$$

ratkaisut.

2) Tutkitaan, että varmasti pätee

$$f''(z_0) \neq 0.$$

3) Muunnetaan tarvittaessa Cauchyn lausetta käyttämällä integrointipolkua γ_0 uudeksi poluksi γ, joka kulkee ainakin yhden satulapisteen kautta suuntaan, jossa $\mathrm{Re}(f(z) - f(z_0))$ **vähenee nopeimmin.**

Tämän suunnan voi löytää käyttämällä suoran pätkää $\gamma(t) = z_0 + te^{i\theta}$, $|t|$ pieni, ja sillä pätevän Taylorin sarjan sijoittamista

$$f(z) = f(z_0) + (z-z_0)\overbrace{f'(z_0)}^{=0} + \tfrac{1}{2}(z-z_0)^2 f''(z_0) + O((z-z_0)^3), \quad z = \gamma(t) = z_0 + te^{i\theta}.$$

$$= f(z_0) + t^2 e^{i2\theta} f''(z_0) + O(t^3)$$

$$= f(z_0) - \tfrac{1}{2}t^2\, |f''(z_0)| \cdot e^{i(\varphi_0 + 2\theta)} + O(t^3),$$

jossa $\varphi_0 = \mathrm{Arg}(-f''(z_0))$

$\Rightarrow$ nopein väheneminen saadaan, kun $e^{i(\varphi_0 + 2\theta)} = 1$ eli

$$\varphi_0 + 2\theta = 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}.$$

4) Satulapisteen z_0 yli kulkevasta polun γ osasta saadaan tällöin

$$\int_{-\delta}^{\delta} g(\gamma(t))\, e^{N f(\gamma(t))}\, \dot{\gamma}(t)\, dt$$

$$\approx \sqrt{\frac{2\pi}{-N f''(z_0)}}\, g(z_0)\, e^{N f(z_0)}, \text{ kun}$$

N suuri.

5) Jos haluaa tietää approksimaation tarkkuuden, täytyy arvioida loppupolun yli otetun integraalin arvo. Jos polku on hyvin valittu, on se tyypillisesti eksponentiaalisen pieni N:ssä.

Voidaan myös laskea korjaustermejä approksimaatioon, kehittämällä integrandia Taylorin sarjaksi kuten edellä on kerrottu.

(kuten Stirling)

* Helpoin tapaus: $\gamma(t)$ kulkee reaaliakselilla, jolla on vain yksi satulapiste z_0, jossa $f''(z_0) = -\sigma,\ \sigma > 0.$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\, e^{N f(x)}\, dx \,\Big|\, x = z_0 + t$$

$$= g(z_0)\, e^{N f(z_0)} \int_{-\infty}^{\infty} G(t)\, e^{-\frac{1}{2} N \sigma t^2}\, dt$$

$$\approx g(z_0)\, e^{N f(z_0)} \sqrt{\frac{2\pi}{N\sigma}}$$

Tarkkuutta voidaan yrittää parantaa G:n Taylorin polynomilla,

$$G(t) = \frac{g(z_0 + t)}{g(z_0)}\, e^{N\left[f(z_0+t) - f(z_0) + \frac{1}{2}\sigma t^2\right]}$$

Kertausta MAPUsta:

Parillisten ja parittomien funktioiden integrointi symmetrisen välin yli:

Määr. a) f on parillinen funktio, jos

$$f(-x) = f(x).$$

b) f on pariton funktio, jos

$$f(-x) = -f(x).$$

Näille pätee: (alla $\delta > 0$)

1) Jos f on parillinen,

$$\int_{-\delta}^{\delta} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{\delta} f(x)\,dx$$

ja $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{\infty} f(x)\,dx.$

2) Jos f on pariton

$$\int_{-\delta}^{\delta} f(x)\,dx = 0 = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$$

Syy: $\int_{-\delta}^{\delta} f(x)\,dx = \int_{0}^{\delta} f(x)\,dx + \int_{-\delta}^{0} f(x)\,dx \Big|_{y=-x}$

$$= \int_{0}^{\delta} f(x)\,dx + \int_{0}^{\delta} f(-y)\,dy.$$

$\Rightarrow$ 1) ja 2).