- Esim. 4.3: Korjataan painovirhe,

$$t := \frac{x^2}{x^2+4} \iff tx^2 + 4t = x^2 \iff x^2 = \frac{4t}{1-t}$$

$$\Rightarrow 2x \frac{dx}{dt} = \frac{4(1-t) - 4t\cdot(-1)}{(1-t)^2} = \frac{4}{(1-t)^2}.$$

ja $\displaystyle \frac{x}{(x^2+4)^a} = x\left(\frac{t}{x^2}\right)^a = t^a (x^2)^{\frac{1}{2}-a}$

$$= t^a \cdot 2^{1-2a}\left(\frac{t}{1-t}\right)^{\frac{1}{2}-a} = 2^{1-2a}\, t^{\frac{1}{2}} (1-t)^{a-\frac{1}{2}}.$$

$$\Rightarrow \int_0^\infty \frac{x^2}{(x^2+4)^a}\,dx = \int_0^1 2^{1-2a}\, t^{\frac{1}{2}}(1-t)^{a-\frac{1}{2}} \cdot \frac{2}{(1-t)^2}\,dt$$

$$= 2^{2-2a}\int_0^1 t^{\frac{1}{2}}(1-t)^{a-5/2}\,dt = 2^{2-2a} B\left(\frac{3}{2}, a-\frac{3}{2}\right)$$

kunhan $a - \frac{3}{2} > 0 \iff a > \frac{3}{2}$.

4.5. Asymptoottiset kehitelmät

= sarjoja, jotka eivät suppene, mutta joita voi silti käyttää approksimointiin.

Esim 1. (Honkonen s. 93-94)

* Palautetaan mieliin usein tässä yhteydessä tarvittava työkalu: Taylorin lause (Wikipedia: Taylor's theorem)

Jos f on $n+1$ kertaa jatkuvasti derivoituva välillä $(\alpha, \beta) \subset \mathbb{R}$ ja $x_0 \in (\alpha, \beta)$, pätee kaikilla $x \in (\alpha, \beta)$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + R_n(x; x_0),$$

jossa jäännöstermi R_n toteuttaa

$$R_n(x; x_0) = \int_{x_0}^{x} \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n \, dt$$

ja kaikilla x löytyy $\theta = \theta_n(x; x_0) \in [0,1]$, jolla

$$R_n(x; x_0) = \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta \cdot (x-x_0))}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}.$$

Kun $f(x) = \ln(1+x)$, on $f'(x) = \frac{1}{1+x}$,

$$f''(x) = \frac{-1}{(1+x)^2}, \ldots, f^{(k)}(x) = (-1)^{k-1}(k-1)!\,(1+x)^{-k}.$$

[MAT) Todistus induktiolla k:ssa, $k \geq 1$.]

Valitsemalla $x_0 = 0$, saadaan siis Taylorin lauseesta

$$f(x) = \ln(1+0) + \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{k!}(1+0)^{-k} x^k + R_n(x; 0)$$

eli $f(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k + R_n(x)$,

jossa $R_n(x) = \frac{(-1)^n n!}{(n+1)!} (1+\theta x)^{-(n+1)} x^{n+1}$, $\theta \in [0,1]$.

Aiemmin johdettujen tulosten perusteella, potenssisarja $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k$ suppenee jos ja vain jos

$-1 < x \leq 1$. Eli, jos x pidetään kiinnitettynä

pätee $|R_n(x)| \xrightarrow{n\to\infty} 0$ vain arvoilla $-1 < x \leq 1$.

Toisaalta, jos $x > 1$, on $1+\theta x \geq 1$, joten

$|R_n(x)| \leq \frac{x^{n+1}}{n+1}$. Etsitään N, jossa yläraja

$u_N := \frac{x^N}{N}$ saavuttaa miniminsä: $\frac{u_{N+1}}{u_N} = \frac{x^{N+1}}{N+1} \cdot \frac{N}{x^N} = \frac{N}{N+1} x$,

joten $u_{N+1} \leq u_N \iff x \leq \frac{N+1}{N} = 1 + \frac{1}{N} \iff N \leq \frac{1}{x-1}$.

u_N:n minimi saavutetaan siis arvolla $N = \left\lfloor \frac{1}{x-1} \right\rfloor$.
($:=$ suurin kokonaisluku N, jolle $N \leq \frac{1}{x-1}$).

Näin ollen yo. ylärajan perustuva "paras" approksimaatio saadaan valitsemalla

$$f(x) \approx \sum_{k=1}^{N-1} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k, \quad \text{kun } x > 1 \text{ ja } N = \left\lfloor \frac{1}{x-1} \right\rfloor.$$

Jotta $N - 1 \geq 1$, pitää siis olla $2 \leq \frac{1}{x-1} \Rightarrow x - 1 \leq 2$

$\Leftrightarrow x \leq 3$.

* Approksimaation tarkkuus hyvä vain kun $x \gtrsim 1$.
Esim. jos $x = 1 + \varepsilon$, $0 < \varepsilon \ll 1$, on $N \approx \frac{1}{\varepsilon}$ ja

$$|R_N(x)| \leq \frac{x^{N+1}}{N+1} = \frac{e^{(N+1)\ln(1+\varepsilon)}}{N+1} \approx \frac{e^{N\varepsilon}}{1/\varepsilon} \approx \varepsilon.$$

Esim 2. (Arfken, luku 5.10)

Epätäydellinen Γ-funktio määritellään

$$\Gamma(z,x) := \int_x^\infty t^{z-1} e^{-t}\, dt \quad , \quad x > 0 .$$

(eli $\Gamma(z,x) \to \Gamma(z)$ kun $x \to 0$, jos $\operatorname{Re} z > 0$.)

Johdetaan asymptoottinen sarja kun $p := 1 - z > 0$,
Merkitään $I(x,p) := \Gamma(1-p, x)$ kun $x, p > 0$.
Osittaisintegroimalla nähdään, että

$$I(x,p) = \int_x^\infty t^{-p} e^{-t}\, dt = \Big/_x^\infty \frac{-e^{-t}}{t^p} - \int_x^\infty (-e^{-t})\cdot(-p) t^{-p-1}\, dt$$

$$= \frac{e^{-x}}{x^p} - p \int_x^\infty t^{-p-1} e^{-t}\, dt = \frac{e^{-x}}{x^p} - p\, I(x, p+1)$$

Tätä iteroimalla saadaan siis kaikilla $n \in \mathbb{N}$ tulos

$$I(x,p) = \frac{e^{-x}}{x^p} - p \frac{e^{-x}}{x^{p+1}} + p(p+1) \frac{e^{-x}}{x^{p+2}} - \dots$$

$$+ \prod_{j=0}^{n} (p+j) \cdot (-1)^{n+1} \cdot I(x, p+1+n)$$

$$= e^{-x} \sum_{k=0}^{n} \overbrace{(-1)^k \frac{\Gamma(p+k)}{\Gamma(p)} x^{-p-k}}^{=: u_k} + R_n(x,p),$$

jossa $R_n(x,p) := (-1)^{n+1} \prod_{j=0}^{n} (p+j) \cdot \int_x^\infty t^{-p-1-n} e^{-t}\, dt .$

* Nyt $\dfrac{|u_{k+1}|}{|u_k|} = \dfrac{\Gamma(p+k+1)}{\Gamma(p+k)} \cdot \dfrac{x^{-p-k-1}}{x^{-p-k}} = \dfrac{p+k}{x} \to \infty$ kun $k \to \infty$,

joten sarja ei suppene millään $x > 0$.

* Toisaalta, koska

$$0 < I(x, p+1+n) = \int_x^\infty t^{-p-1-n} e^{-t}\, dt \Big|_{v=t-x}$$

$$= \int_0^\infty (x+v)^{-p-1-n} e^{-(x+v)} dv$$

$$= e^{-x} x^{-p-1-n} \int_0^\infty \underbrace{\left(1+\frac{v}{x}\right)}_{\geq 1}^{\overbrace{-p-1-n}^{\leq 0}} e^{-v}\, dv$$

$$\leq e^{-x} x^{-p-1-n} \int_0^\infty e^{-v}\, dv = e^{-x} x^{-p-1-n},$$

pätee $|R_n(x,p)| \leq \prod_{j=0}^{n} (p+j) \cdot I(x, p+1+n)$

$$\leq \frac{(p+n)^{n+1}}{x^{n+1+p}} e^{-x}.$$

Näin ollen $R_n(x,p) \to 0$, kun $x \to \infty$, ja jopa $e^x R_n(x,p) \to 0$.

* Saadaan arvio $\left| e^x I(x,p) - S_n(x,p) \right| \leq \frac{1}{x^p} \left(\frac{p+n}{x}\right)^{n+1}$ $\to 0$ kun $x \to \infty$, jossa

$$S_n(x,p) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{\Gamma(p+k)}{\Gamma(p)} x^{-p-k}.$$

$\Rightarrow$ $e^x I(x,p) \approx S_n(x,p)$ ainakin jos $\overbrace{p+n \leq \frac{x}{2}}^{x \geq 1 \text{ ja}}$.
(virhe $\leq 2^{-n-1}$.)

* Esimerkki tarkkuudesta kun $p=1$: Arfken s. 391.

* Yksi mahdollinen määritelmä asymptoottiselle potenssisarjalle, kun $z \to \infty$, on vaatia

$$\lim_{z \to \infty} z^n \left\{ f(z) - \sum_{k=0}^{n} \frac{c_k}{z^k} \right\} = 0 \quad \forall n = 0, 1, \ldots .$$

Tällöin merkitään $f(z) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k}{z^k}$.

* Ominaisuus säilyy lineaarikombinaatioissa ja tuloissa: Honkonen, s. 94.