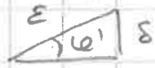
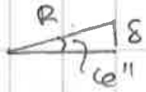
Toisaalta $J_1 = \int_{C_\varepsilon} f(w)\,dw$ ja $J_2 = \int_{C_R} f(w)\,dw$

ovat eksplisiittisesti



$$J_1 = -\int_{\varphi'}^{2\pi-\varphi'} f(\varepsilon e^{i\varphi})\cdot \varepsilon e^{i\varphi} i\,d\varphi$$



ja $$J_2 = \int_{\varphi''}^{2\pi-\varphi''} f(Re^{i\varphi})\, R e^{i\varphi} i\,d\varphi,$$

Koska $|f(\varepsilon e^{i\varphi})| = \frac{e^{(z-1)\mathrm{Re}[\overline{\ln}(-\varepsilon e^{i\varphi})]}}{|1+\varepsilon e^{i\varphi}|} \le \frac{e^{(z-1)\ln\varepsilon}}{1-\varepsilon}$

saadaan siis estimaatti $|J_1| \le \varepsilon^{1+z-1}\frac{1}{1-\varepsilon}\int_0^{2\pi} d\varphi$

$= \frac{\varepsilon^z}{1-\varepsilon}2\pi \to 0$ kun $\varepsilon \to 0^+$, sillä $z>0$.

Samoin nähdään $|J_2| \le \frac{R}{R-1} R^{z-1}\cdot 2\pi \to 0$

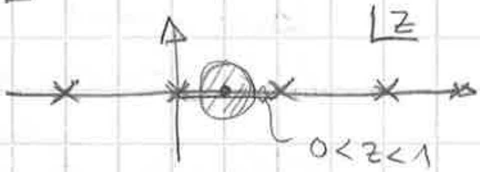
kun $R\to\infty$, sillä $z-1<0$. Näin ollen $J_1 + J_2 \to 0$ tutkitulla rajalla, ja ollaan saatu tulos

$$\left(1-\overbrace{e^{i2\pi(z-1)}}^{=e^{i2\pi z}}\right) I(z) = 2\pi i\cdot \overbrace{e^{i\pi(z-1)}}^{=-e^{i\pi z}}, \text{ kun } 0<z<1.$$

$$\overset{z\notin\mathbb{Z}}{\Rightarrow}\quad I(z) = 2\pi i\,\frac{-e^{i\pi z}}{1-e^{i2\pi z}} = 2\pi i\,\frac{-e^{i\pi z}\cdot e^{-i\pi z}}{e^{-i\pi z}-e^{i\pi z}}$$

$$= 2\pi i\,\frac{-1}{-2i\cdot\sin(\pi z)} = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}. \square$$

- "(4.17)" analyyttinen jatke:



$\Gamma(z)$ analyyttinen, kun $z \ne -n$, $n=0,1,\dots$
$\Gamma(1-z)$ —"— $z \ne 1+n$, $n=0,1,\dots$
$\Rightarrow \Gamma(z)\Gamma(1-z)$ analyyttinen, kun $z\notin\mathbb{Z}$.
Koska $\sin(\pi z)=0 \Leftrightarrow z\in\mathbb{Z}$, on myös (4.17):n oikea puoli analyyttinen samassa alueessa, $\Omega := \mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}$.
Yllä todistettiin, että kaava (4.17) pätee kun $0<z<1$, joka leikkaus esim. suljetun kuulan $\overline{B}(\frac{1}{2},\frac{1}{4})\subset\Omega$ kanssa sisältää äärettömän monta pistettä $\Rightarrow$ (4.17) on totta kaikilla $z\in\Omega$.

- Kaavan "(4.21)" johto:

Kun $t>0$, $e^{-t}<1$, joten $\dfrac{1}{e^t+1}=\dfrac{e^{-t}}{1+e^{-t}}=e^{-t}\sum_{m=0}^{\infty}(-e^{-t})^m$

$$=\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m e^{-t(m+1)}.$$

Halutaan vaihtaa summan ja integraalin järjestystä. Tätä varten tutkitaan itseisarvoista koottua integraalia

$$\int_0^\infty dt\, t^{n-1}\sum_{m=0}^{\infty} e^{-t(m+1)} = \int_0^\infty dt\, t^{n-1}\frac{e^{-t}}{1-e^{-t}} < \infty$$

sillä $e^t-1=\int_0^t du\, \underbrace{e^u}_{\geq 1} \geq \int_0^t 1\, du = t$,

joten $\int_0^\infty dt\, t^{n-1}\dfrac{e^{-t}}{1-e^{-t}} \leq \int_0^1 dt\, t^{n-2} + \int_1^\infty dt\, t^{n-1}\dfrac{e^{-t}}{1-e^{-1}} < \infty$,

kun $n>1$. Näin ollen

$$\int_0^\infty \frac{t^{n-1}}{e^t+1}\,dt = \sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\int_0^\infty t^{n-1}e^{-t(m+1)}\,dt \quad \Big|_{u=t(m+1)}$$

$$=\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\int_0^\infty\left(\frac{u}{m+1}\right)^{n-1}e^{-u}\frac{du}{m+1}$$

$$=\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\frac{1}{(m+1)^n}\Gamma(n)=\Gamma(n)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k^n}$$

Jäljellä oleva summa on itseisesti suppeneva, koska $n>1$, joten sen positiiviset ja negatiiviset termit voidaan summata erikseen. Loppulasku seuraakin kuten kirjan sivulla s. 91.

- s. 92. muuttujanvaihdot:

a) $t=r^2$, jolloin $\dfrac{dt}{dr}=2r$

b) $x=\cos^2\phi$, jolloin $\dfrac{dx}{d\phi}=-2\cos\phi\sin\phi=-\sin(2\phi)<0$ kun $0<\phi<\frac{\pi}{2}$.