Liite) Fourier'n muunnoksen pisteittäinen suppeneminen ja Gibbsin ilmiö
(Vrt. Honkonen, Luku 5.3 ja luku 6.3)

Yleensä Fourier'n muunnosta käytettäessä helpompi L^2-teoria riittää, eli esim. käänteismuunnosta otettaessa, ei tarvitse välittää siitä, että se antaa alkuperäisen funktion takaisin vain melkein kaikkialla.

Joskus on kuitenkin tärkeää varmistaa, että käänteismuunnos toimii jossain annetussa pisteessä. Alla oleva Dinin ehto on yksi helpoimmista tavoista tehdä tämä.

Samalla nähdään, että käänteismuunnoksen suppeneminen epäjatkuvuuspisteiden lähellä on hieman patologista: se ei tapahdu monotonisesti, vaan suppenemiseen liittyy tiheää oskillaatiota. Tätä ominaisuutta kutsutaan Gibbsin ilmiöksi.

Lähdetään liikkeelle funktiosta $f(x)$, $x \in \mathbb{R}$, ja pisteestä $x_0 \in \mathbb{R}$, olettaen, että

a) f on itseisesti integroituva: $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\,dx < \infty$

b) f:llä on vasen ja oikea raja-arvo pisteessä x_0, eli löytyy $f(x_0^-)$ ja $f(x_0^+)$.

* Erityisesti "b)" pätee, jos f on jatkuva pisteessä x_0: tällöin $f(x_0^-) = f(x_0) = f(x_0^+)$.

Oletuksesta "a)" seuraa, että f:n Fourier'n muunnos, $\hat{f}(p)$, on jatkuva ja häviää äärettömyydessä. (Ks. s. 129). Mikä lisäoletus takaa, että käänteismuunnoskaan toimii pisteessä x_0, eli milloin pätee

$$(*) \quad \frac{f(x_0^-)+f(x_0^+)}{2} = \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} e^{ipx_0}\hat{f}(p)\frac{dp}{2\pi} \quad ?$$

(Huom: Jos x_0 on jatkuvuuspiste, tulee oikealle puolelle pelkkä $f(x_0)$.)

Osoitetaan lopussa, että tähän riittää esim. seuraavan Dinin ehdon toteutuminen:

f toteuttaa Dinin ehdon, jos a) ja b) pätevät, ja lisäksi löytyy jokin $\varepsilon > 0$ jolla

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} |\Phi(y;x_0)|\,dy < \infty,$$

missä

$$\Phi(y;x_0) := \frac{f(x_0+y)+f(x_0-y)-f(x_0^-)-f(x_0^+)}{2y}$$

* Dinin ehto toteutuu erityisesti, jos löytyy $\varepsilon>0$, jolla f on jatkuvasti derivoituva väleillä $[x_0-\varepsilon, x_0]$ ja $[x_0, x_0+\varepsilon]$; tällöin, kun $y>0$,

$$f(x_0+y)-f(x_0^+) = \int_0^y dy'\, f'(x_0+y')$$

ja
$$f(x_0^-)-f(x_0-y) = \int_{-y}^{0} dy'\, f'(x_0+y'),$$

joten $|\Phi(y;x_0)| \le \frac{1}{2}\left(\max_{x_0-\varepsilon\le x\le x_0}|f'(x)| + \max_{x_0\le x\le x_0+\varepsilon}|f'(x)|\right)$

$<\infty$, sillä f' oletettiin jatkuvaksi.

* Erityisesti siis, jos f on itseisesti integroituva ja rakennettu paloista, jotka ovat jatkuvasti derivoituvan funktion rajoittumia väleille, pätee käänteismuunnoskaava (*) kaikissa pisteissä $x_0 \in \mathbb{R}$. Tällaisia funktioita ovat esim. $f(x) = e^{-|x|}$, $f(x) = |x|e^{-x^2}$, $f(x) = \theta(x)e^{-x}$, ja $f(x) = \mathbb{1}(a<x<b)$, kun $a,b\in\mathbb{R}$ ja $a<b$.

* Todistus sille, että Dinin ehdosta seuraa käänteismuunnostulos "(*)":

Tarkastellaan integraalia (yksinkertaisuuden vuoksi merk. $x_0 = x$)

$$I_R := \int_{-R}^{R} e^{ipx} \hat{f}(p) \frac{dp}{2\pi} = \int_{-R}^{R} \frac{dp}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dy\, e^{ip(x-y)} f(y)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dy\, f(y) \int_{-R}^{R} \frac{dp}{2\pi} e^{ip\cdot(x-y)}$$

[MAT) Integrointijärjestyksen saa vaihtaa Fubinin lauseen nojalla, sillä "a)" mukaan integrandin itseisarvolle, $\frac{1}{2\pi} |f(y)|$, pätee $\int_{-R}^{R} dp \int_{-\infty}^{\infty} dy \frac{1}{2\pi} |f(y)| < \infty$.]

Tässä $\int_{-R}^{R} \frac{dp}{2\pi} e^{ip\cdot(x-y)} = D_R(x-y)$, missä D_R on ns. Dirichlet'n ydin, funktio joka määritellään

$$D_R(u) := \int_{-R}^{R} \frac{dp}{2\pi} e^{ipu} \text{ ja siten } D_R(0) = \frac{2R}{2\pi} = \frac{R}{\pi} \text{ ja}$$

Kun $u \neq 0$, saadaan

$$D_R(u) = \frac{1}{2\pi} \Big/_{-R}^{R} \frac{1}{iu} e^{ipu} = \frac{-i}{2\pi u} \left(e^{iRu} - e^{-iRu}\right)$$

$$= \frac{-i}{2\pi u} \cdot 2i \sin(Ru) = \frac{\sin(Ru)}{\pi u}$$

Selvästi $D_R(-u) = D_R(u)$, joten D_R on parillinen funktio, ja siten pätee

$$I_R = \int_{-\infty}^{\infty} dy\, f(y) D_R(x-y) \overset{y'=x-y}{=} \int_{-\infty}^{\infty} dy'\, f(x-y') D_R(y')$$

$$= \int dy'\, \mathbb{1}(|y'| > \varepsilon) f(x-y') D_R(y')$$

$$+ \underbrace{\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} dy'\, f(x-y') D_R(y')}_{\underset{y''=-y'}{=} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} dy''\, f(x+y'') D_R(y'')}$$

$$\Rightarrow \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} dy' \, f(x-y') D_R(y')$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} dy \, \big(f(x-y) + f(x+y) \big) D_R(y)$$

$$= \int_{-\varepsilon} dy \, \tfrac{1}{2} \big(2y \, \Phi(y;x) + f(x^-) + f(x^+) \big) D_R(y)$$

$$= \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} dy \, \Phi(y;x) \, y \, D_R(y) + \frac{f(x^-)+f(x^+)}{2} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} dy \, D_R(y) .$$

Oletuksen mukaan funktiolle $g(y) := \mathbb{1}(|y|<\varepsilon)\Phi(y;x)$ pätee

$$\int_{-\infty}^{\infty} |g(y)| \, dy = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} dy \, |\Phi(y;x)| < \infty .$$

Tällöin

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} dy \, \Phi(y;x) \, y \, D_R(y) = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} dy \, \Phi(y;x) \frac{1}{\pi} \overbrace{\sin(Ry)}^{= \frac{1}{2i}(e^{iRy} - e^{-iRy})}$$

$$= \frac{1}{\pi} \frac{1}{2i} \left[\int_{-\infty}^{\infty} dy \, g(y) \, e^{iRy} - \int_{-\infty}^{\infty} dy \, g(y) \, e^{-iRy} \right]$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \left[\hat{g}(-R) - \hat{g}(R) \right] ,$$

jossa $\hat{g}(\pm R) \to 0$ kun $R \to \infty$, Riemannin–Lebesguen lemman nojalla, sillä $\int dy \, |g(y)| < \infty$.
(ks. s. 129, kohta c).

Samalla tavalla saadaan I_R:n ensimmäinen termi kirjoitettua muotoon:

$$\int dy' \, \mathbb{1}(|y'|>\varepsilon) \, f(x-y') D_R(y')$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dy' \, h(y') \frac{1}{\pi} \sin(Ry') = \frac{1}{2\pi i} \big(\hat{h}(-R) - \hat{h}(R) \big) ,$$

käyttäen funktiota $h(y) := \mathbb{1}(|y|>\varepsilon) \frac{1}{y} f(x-y)$.

Koska $|h(y)| \le \frac{1}{\varepsilon} |f(x-y)|$, nähdään, että

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(y)|\, dy \le \frac{1}{\varepsilon} \int_{-\infty}^{\infty} |f(y')|\, dy' < \infty.$$

Näin ollen voidaan taas soveltaa Riemannin-Lebesguen lemmaa ja nähdään, että

$$\lim_{R\to\infty} \int dy'\, \mathbb{1}(|y'|>\varepsilon)\, f(x-y')\, D_R(y') = 0.$$

Jäljelle jää enää integraali

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} dy\, D_R(y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} dy\, \frac{\sin(Ry)}{y} \overset{\text{parillisuus}}{=} \frac{2}{\pi} \int_0^{\varepsilon} dy\, \frac{\sin(Ry)}{y}$$

$$\overset{u=Ry}{=} \frac{2}{\pi} \int_0^{\varepsilon R} \frac{du}{R}\, \frac{\sin u}{u/R} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\varepsilon R} du\, \frac{\sin u}{u}.$$

Kuten alla osoitetaan, on

$$\lim_{N\to\infty} \int_0^N du\, \frac{\sin u}{u} = \frac{\pi}{2}, \text{ joten}$$

$$\lim_{R\to\infty} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} dy\, D_R(y) = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{\pi}{2} = 1.$$

Kokoamalla kaikki yo. tulokset yhteen, saadaan

$$\lim_{R\to\infty} I_R = 0 + 0 + \frac{f(x^-)+f(x^+)}{2}\cdot 1 = \frac{f(x^-)+f(x^+)}{2}.$$

Näin ollen "(*)" pätee pisteessä $x_0 = x$.

Tuloksen $\int_0^{\infty} du\, \frac{\sin u}{u} = \frac{\pi}{2}$ johto (käyttäen residyjä):

Huomataan, että kun $0<\varepsilon<N$, on

$$J_{\varepsilon,N} := \int_{\varepsilon}^{N} du\, \frac{\sin u}{u} = \frac{1}{2i}\left(\int_{\varepsilon}^{N} du\, \frac{e^{iu}}{u} - \int_{\varepsilon}^{N} du\, \frac{e^{-iu}}{u} \right) \quad u' = -u$$

$$= \frac{1}{2i}\left(\int_{\varepsilon}^{N} du\, \frac{e^{iu}}{u} + \int_{-N}^{-\varepsilon} du'\, \frac{e^{iu'}}{u'} \right), \text{ joten } \int_0^{\infty} du\, \frac{\sin u}{u}$$

$$= \lim_{N\to\infty}\left(\lim_{\varepsilon\to 0} J_{\varepsilon,N} \right) = \text{P.V.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x}\, \frac{dx}{2i}, \text{ jossa viimeinen}$$

kaava tarkoittaa pääarvointegraalia, joillaista on käsitelty Honkosen kirjassa, sivuilla 67–69. Näitä tuloksia soveltamalla nähdään (ks. (3.19)), että

$$P.V.\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x}\,dx = \frac{1}{2}\cdot 2\pi i\ \mathrm{Res}\left(\frac{e^{ix}}{x},\ x=0\right)$$

$$= \pi i \cdot \frac{e^{ix}}{1}\Big|_{x=0} = \pi i \cdot \underbrace{e^{i0}}_{=1} = i\pi,$$ sillä $\frac{e^{iz}}{z}$ on analyyttinen, 1. kl. napaa $z=0$ lukuunottamatta.

$$\Rightarrow \int_0^{\infty} du\ \frac{\sin u}{u} = \frac{1}{2i}\cdot i\pi = \frac{\pi}{2} \quad \square$$

---

* Yllä nähtiin, että käänteismuunnoskaava voidaan ymmärtää myös konvoluution rajana, sillä

$$I_R = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)\, D_R(x-y)\, dy .$$

Koska funktio $D_R(u) = \frac{\sin(Ru)}{\pi u}$ on vahvasti oskilloiva, kun $R \gg 1$, ei ole yllättävää, että myös käänteismuunnoksessa voi esiintyä suurta oskillaatioita. Näin on erityisesti silloin, kun x on funktion f epäjatkuvuuspiste: tämä on ns. Gibbsin ilmiö.

* Tarkastellaan Gibbsin ilmiötä lopuksi esimerkkitapauksen $f(x) = \mathbb{1}(-1 < x < 1)$ avulla:

Kuten aiemmin todettiin, toteuttaa tämä funktio Dini ehdon, ja käänteiskaavasta saadaan siis

$$\lim_{R\to\infty} I_R(x) = \begin{cases} 1, & \text{kun } |x| < 1 \\ 0, & \text{kun } |x| > 1 \\ \frac{1}{2}, & \text{kun } x=-1 \text{ tai } x = 1. \end{cases}$$ f:n jatkuvuuspisteitä

jossa $I_R(x) = \int_{-R}^{R} e^{ipx}\hat{f}(p)\frac{dp}{2\pi} = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)\, D_R(x-y)\, dy.$

* Kurssin kotisivuilta löytyy PDF-tiedosto, jossa on I_R:in kuvaaja eri R:n arvoilla. Gibbsin ilmiö näkyy selvästi epäjatkuvuuspisteissä $x = \pm 1$.