* Kurssin pääasiat on saatu käytyä läpi. Alla olevat asiat kuuluvat kaikki "LISÄ"-asioihin.

LISÄ) 7.4. Mellinin muunnos

Funktion $f(t)$, $t>0$, Mellinin muunnos on

$$\mathcal{M}[f](s) = \int_0^\infty f(t)\, t^{s-1}\, dt .$$

Tässä s on jokin kompleksiluku, jolle integraali suppenee. Esim. jos $f(0^+) \neq 0$, on oltava vähintään $\mathrm{Re}\, s > 0$.

* Mellinin muunnos liittyy suoraan kaksipuoliseen Laplacen muunnokseen muuttujanvaihdon kautta: asetetaan $u = -\ln t \Leftrightarrow t = e^{-u}$,

$$\Rightarrow \mathcal{M}[f](s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(e^{-u})\, e^{-(s-1)u}\, e^{-u}\, du$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(e^{-u})\, e^{-su}\, du = \mathcal{B}[g](s),$$

kun $g(u) = f(e^{-u})$, $u \in \mathbb{R}$. Sivun 140 tulosta soveltamalla saadaan siis suoraan, että

$$f(t) = g(-\ln t) = \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \underbrace{e^{s(-\ln t)}}_{=t^{-s}} \mathcal{B}[g](s)\, \frac{ds}{2\pi i}$$

$$= \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} t^{-s}\, \mathcal{M}[f](s)\, \frac{ds}{2\pi i}, \quad \text{kun } a<\sigma<b,$$

jossa vähintään

$$\infty > \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\sigma u} |g(u)|\, du \overset{t=e^{-u}}{=} \int_0^\infty t^{\sigma} |g(-\ln t)|\, \frac{dt}{t}$$

$$= \int_0^\infty t^{\sigma-1} |f(t)|\, dt .$$

* Yhteenvetona saadaan seuraava Mellinin muunnoksen kääntyvyyttä koskeva tulos:

Oletetaan, että f on funktio ja löytyy $a < b$, joilla
$$\int_0^\infty t^{\sigma-1} |f(t)|\, dt < \infty, \text{ aina kun } a < \sigma < b.$$

Tällöin sen Mellinin muunnos $M(s) = \mathcal{M}[f](s)$ on analyyttinen funktio alueessa $a < \operatorname{Re} s < b$.

Jos lisäksi pätee $\int_0^\infty t^{2\sigma-1} |f(t)|^2\, dt < \infty$, kaikilla $a < \sigma < b$, pätee myös käänteismuunnoskaava
$$f(t) = \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} t^{-s} M(s) \frac{ds}{2\pi i}, \text{ aina kun } a < \sigma < b.$$

* Mellinin muunnos on kätevä erityisesti silloin, kun f käyttäytyy kuten jokin potenssifunktio äärettömyydessä, eli kun $f(t) \approx C t^p$, kun $t \gg 1$, joillakin $C, p \in \mathbb{C}$. (Vrt. Laplacen muunnos, joka toimi erityisen hyvin eksponentiaalisesti käyttäytyville funktioille, $f(t) \approx C e^{-pt}$.)

* Tällainen tilanne voi tulla vastaan esimerkiksi ns. kriittisten ilmiöiden korrelaatiofunktioissa.

* Esimerkki: $f(t) = \mathbb{1}(t>1)\, t^p$:n Mellinin muunnos on (kun $\operatorname{Re} s < -\operatorname{Re} p$)
$$M(s) = \int_1^\infty t^p t^{s-1}\, dt = \Big/_1^\infty \frac{1}{p+s} t^{p+s} \overset{\operatorname{Re}(p+s)<0}{=} -\frac{1}{s+p}.$$

Tällä funktiolla on vain yksi erikoispiste, 1 kl. napa pisteessä $s = -p$, joten sen käänteismuunnoskin on helppo tehdä.

Lisä) 8. Distribuutiot

Johdantoa) Monia fysiikan ilmiöitä kuvataan yhtälöillä, jotka riippuvat tiheyksistä $\rho(\bar{r})$, $\bar{r} \in \mathbb{R}^3$.

* Esim. Maxwellin yhtälöt, jotka kuvaavat jonkin aineen sähkömagneettisia ominaisuuksia, riippuvat aineen varaustiheydestä.

Varaustiheys $\rho(\bar{r})$ on funktio, joka kertoo kuinka paljon varausta, Q_V, on minkä tahansa tilavuuden $V \subset \mathbb{R}^3$ sisällä:

$$Q_V = \int_V d^3\bar{r}\, \rho(\bar{r}) = \int_{\mathbb{R}^3} d^3\bar{r}\, \mathbb{1}(\bar{r} \in V)\, \rho(\bar{r}).$$

* Elektroni on pistemäinen hiukkanen, jonka varaus on $q_e < 0$. Mikä siis on otettava varaustiheydeksi Maxwellin yhtälöissä, kun elektroni on pisteessä $\bar{r}_0$?

Ongelma: Ei ole olemassa mitään funktiota $\rho(\bar{r})$, jolle pätisi kaikilla V, että $\int_V d^3\bar{r}\, \rho(\bar{r}) = \begin{cases} q_e, & \text{kun } \bar{r}_0 \in V, \\ 0, & \text{kun } \bar{r}_0 \notin V. \end{cases}$

$= q_e \mathbb{1}(\bar{r}_0 \in V)$.

* Ratkaisu: Ei vaadita enää, että $\rho(\bar{r})$ on funktio, vaan käytetään sitä lyhennysmerkintänä säännölle, joka kertoo varauksen, kun sitä mitataan jossain tilavuudessa V. Tarkemmin, vaaditaan että aina kun f on testifunktio,

$$\rho[f] \text{ "}= \int_{\mathbb{R}^3} d^3\bar{r}\, f(\bar{r})\, \rho(\bar{r})\text{"}$$

= f:n "mittaama" varaus.

* Elektronin varaustiheys ρ_e vastaa siis sääntöä

$$\rho_e[f] = q_e\, f(\bar{r}_0), \quad \text{kaikilla testifunktioilla } f.$$

Tästä käytetään yleensä merkintää

$$\rho_e(\bar{r}) = q_e\, \delta(\bar{r}-\bar{r}_0),$$

missä "$\delta(\bar{x})$" on <u>Diracin δ-distribuutio</u>

$$\delta[f] := f(\bar{0}) \quad \text{ja} \quad \delta_{\bar{r}_0}[f] := f(\bar{r}_0).$$

8.1. Funktioiden määräämä distribuutio

* Pistemäisten hiukkasten lisäksi ovat distribuutiot käteviä myös seuraavassa tilanteessa:

Olkoon (varaus)tiheys <u>funktion</u> $\rho_\varepsilon(\bar{r})$ antama, ja se on keskittynyt täysin origoon, ε-säteisen pallon sisälle. Mitataan varaustiheyttä laitteella, jonka resoluutio on $R \gg \varepsilon$. Jos laite on asetettuna pisteeseen $\bar{r}_0$, antaa se mittaustulokseksi siis ($Q = \int d^3\bar{r}\, \rho_\varepsilon(\bar{r})$ = kokonaisvaraus)

$$\approx \begin{cases} Q, & \text{jos } |\bar{r}_0| \lesssim R, \\ 0, & \text{muuten.} \end{cases}$$

* Koska laitteen resoluutio ei riitä erottamaan funktion $\rho_\varepsilon(\bar{r})$ yksityiskohtia, onkin tällöin helpompi ilmoittaa mittaustulos distribuutiona,

$$\rho_\varepsilon(\bar{r}) \simeq Q\, \delta(\bar{r}).$$

* Matemaattisesti tätä tilannetta voidaan mallintaa olettamalla, että ρ_ε on jonkin funktion g määräämä, kaavan

$$\rho_\varepsilon(\bar r) = \varepsilon^{-3} g\left(\frac{\bar r}{\varepsilon}\right)$$

avulla. Tässä oletetaan, että $g(\bar x) = 0$, kun $|\bar x| \geq 1$, joka takaa, että $\rho_\varepsilon(\bar r) = 0$, kun $|\bar r| \geq \varepsilon$. Lisäksi edessä oleva kerroin varmistaa, että kaikilla $\varepsilon > 0$ pätee

$$Q = \int_{\mathbb{R}^3} d^3\bar r\, \rho_\varepsilon(\bar r) = \int d^3\bar r\, \varepsilon^{-3} g\left(\frac{\bar r}{\varepsilon}\right) \overset{\bar x = \frac{\bar r}{\varepsilon}}{=} \int d^3\bar x\, g(\bar x).$$

Tavoitteena on siis pitää "mikroskooppinen" jakauma $g(\bar x)$ ($= \rho_\varepsilon(\bar r)$ kun $\varepsilon = 1$) vakiona ja muuttaa pituusskaalaa "$1 \to \varepsilon$".

Oletetaan tämän jälkeen, että laitteen mittaustarkkuus R on valittu pituusyksiköksi, ja että laitteen mittaama tulos $\bar X$, kun jakauma on $\rho(\bar r)$, saadaan jonkin testifunktion f avulla kaavasta $\bar X = \int d^3\bar r\, f(\bar r)\rho(\bar r)$. Tällöin yo. tapauksessa

$$\int_{\mathbb{R}^3} d^3\bar r\, f(\bar r)\rho_\varepsilon(\bar r) = \int d^3\bar r\, f(\bar r)\, \varepsilon^{-3} g\left(\frac{\bar r}{\varepsilon}\right)$$

$$\overset{\bar x = \frac{\bar r}{\varepsilon}}{=} \int_{\mathbb{R}^3} d^3\bar x\, f(\varepsilon\bar x) g(\bar x) \xrightarrow{\varepsilon \to 0} \int d^3\bar x\, f(\bar 0) g(\bar x)$$

$= f(\bar 0)\, Q$. Tässä mielessä voidaan siis sanoa, että $\rho_\varepsilon(\bar r) \approx Q\,\delta(\bar r)$, kun $\varepsilon \ll R$.

MAT) Lisää tietoa tämäntyyppisten skaalausrajojen matematiikasta löytyy kotisivuilta, PDF-liitteestä.

Yleisemmin sanotaan, että funktiojono F_N, $N\in\mathbb{N}$, lähestyy kohti distribuutiota Λ, jos kaikilla testifunktioilla f pätee

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(\bar r)\, F_N(\bar r)\, d^n\bar r \xrightarrow{N\to\infty} \Lambda[f].$$

Tätä merkitään joskus lyhyemmin $F_N \xrightarrow{N\to\infty} \Lambda$.

* Esim: Olkoon g mikä tahansa funktio, jolle $g\geq 0$ ja $\int_{\mathbb{R}^n} g(\bar r)\, d^n\bar r = 1$. Kun $\bar r_0\in\mathbb{R}^n$, jonolle

$F_N(\bar r) := N^n g(N(\bar r-\bar r_0))$ pätee $F_N \to \delta(\bar r-\bar r_0)$.

Syy: kuten yllä, muuttujanvaihdolla saadaan mielivaltaiselle testifunktiolle f

$$\int f(\bar r)\, F_N(\bar r)\, d^n\bar r = \int f(\bar r)\, N^n g(N(\bar r-\bar r_0))\, d^n\bar r$$

$$\overset{\bar\zeta = N(\bar r-\bar r_0)}{=} \int f\left(\bar r_0+\frac{\bar\zeta}{N}\right) g(\bar\zeta)\, d^n\bar r \xrightarrow{N\to\infty} \int f(\bar r_0)\, g(\bar\zeta)\, d^n\bar\zeta$$

$$= f(\bar r_0)\int g(\bar\zeta)\, d^n\bar\zeta = f(\bar r_0) = \delta_{\bar r_0}[f] = \int f(\bar r)\,\delta(\bar r-\bar r_0)\, d^n\bar r.$$

8.2. Distribuutioiden matemaattinen määritelmä ja perusominaisuuksia

* Distribuutioiden ominaisuuksien kannalta tärkeä asia on testifunktioiden valinta.

Fysiikassa riittää yleensä käyttää Schwartzin funktioita $f\in S_n = S(\mathbb{R}^n)$, eli kompleksiarvoisia funktioita, jotka ovat mielivaltaisen monta kertaa derivoituvia ja kaikki derivaatat häviävät nopeammin kuin mikään potenssi äärettömyydessä.

* Määritelmä: Jatkuvien lineaarikuvausten $\mathcal{S}_n \to \mathbb{C}$ kokoelmaa merkitään $\mathcal{S}_n'$ ja niitä kutsutaan (hillityiksi) distribuutioiksi (engl. tempered distribution).

* Distribuutio Λ on siis kuvaus, joka liittää kuhunkin testifunktioon $f \in \mathcal{S}_n$ kompleksiluvun $\Lambda[f] \in \mathbb{C}$. Lisäksi pätee $\Lambda[\alpha f_1 + \beta f_2] = \alpha \Lambda[f_1] + \beta \Lambda[f_2]$ aina kun $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ ja $f_1, f_2 \in \mathcal{S}_n$.

* Λ:n "jatkuvuuden" tarkistaminen on vähän hankalampaa. Asiaan voi tutustua joko englanninkieliseltä Wikipedia-sivulta (kohta "Distribution (mathematics)") tai Rudinin Functional Analysis -kirjasta (Luvut 6 ja 7).

* Esim: Jos F on funktio, jolle löytyy sellainen $p>0$, että $\int_{\mathbb{R}^n} (1+|\bar{r}|^2)^{-p} |F(\bar{r})| \, d^n\bar{r} < \infty$, on kuvaus

$$\Lambda[f] = \int_{\mathbb{R}^n} F(\bar{r}) f(\bar{r}) \, d^n\bar{r} \quad \text{hillitty distribuutio.}$$

* δ-funktio, $\Lambda[f] := f(\bar{0})$, on hillitty distribuutio. Sama pätee kuvauksille $\Lambda[f] = f(\bar{r}_0)$, kun $\bar{r}_0 \in \mathbb{R}^n$ on annettu; näitä merkitään $\Lambda(\bar{r}) = \delta(\bar{r}-\bar{r}_0)$.

<u>Perusominaisuuksia</u>:

1) Distribuutioista <u>saa</u> ottaa lineaarikombinaatioita: Jos $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ ja $\Lambda_1, \Lambda_2 \in \mathcal{S}_n'$, määritellään

$$(\alpha \Lambda_1 + \beta \Lambda_2)[f] := \alpha \Lambda_1[f] + \beta \Lambda_2[f] \in \mathbb{C}$$

jolloin $\alpha \Lambda_1 + \beta \Lambda_2 \in \mathcal{S}_n'$.

Esim: $Q\,\delta_{\bar{r}_0}$ esiintyi yllä; se määriteltiin

$$(Q\delta_{\bar{r}_0})[f] = Q \cdot \delta_{\bar{r}_0}[f] = Q f(\bar{r}_0).$$

2) Distribuutioita saa derivoida: Jos ∂_i on osittaisderivaatta $\frac{\partial}{\partial r_i}$, määritellään

$$(\partial_i \Lambda)[f] := -\Lambda[\partial_i f].$$

(Syy: Jos $F \in S_1$ ja Λ on F:n antama distribuutio, saadaan osittaisintegroimalla

$$\int_{-\infty}^{\infty} F'(x) f(x)\, dx = \underbrace{\Big/_{-\infty}^{\infty} F(x) f(x)}_{=0} - \int_{-\infty}^{\infty} F(x) f'(x)\, dx$$

$$= -\int_{-\infty}^{\infty} F(x) f'(x)\, dx = -\Lambda[f'].)$$

Esim. Jos Λ on Heavisiden askelfunktion θ määräämä distribuutio, saadaan

$$\Lambda[f'] = \int_{-\infty}^{\infty} \theta(x) f'(x)\, dx = \int_0^{\infty} f'(x)\, dx$$

$$= \Big/_0^{\infty} f(x) = -f(0).$$

$$\Rightarrow -\Lambda[f'] = \delta_0[f]$$

$\Rightarrow \partial_x \Lambda = \delta_0$. Tätä merkitään usein lyhyemmin $\theta'(x) = \delta(x)$. Huomaa, että funktiolla θ on kyllä derivaatta kun $x \neq 0$, mutta tällöin $\theta'(x) = 0 \Rightarrow$ funktion θ' määräämä distribuutio $= 0 \neq \partial_x \Lambda$.

Esim. Mitä on δ'?

$$\delta'[f] = -\delta[f'] = -f'(0).$$

3) Distribuutioita saa kertoa (riittävän säännöllisillä) funktioilla: Esim. kun $g \in S_n$ tai g on polynomi, ja määritellään $(g\Lambda)[f] = \Lambda[gf]$, on myös $g\Lambda \in S_n'$.

4) Hillityistä distribuutioista saa ottaa Fourier'n muunnoksen:

Kun $\Lambda \in S_n'$, määritellään $\hat{\Lambda} \in S_n'$ kaavalla
$$\hat{\Lambda}[f] = \Lambda[\hat{f}] \quad \forall f \in S_n.$$

Esim. Mikä on vakiofunktion $F(x) = 1$, $x \in \mathbb{R}$, määräämän distribuution Fourier'n muunnos?

Kun $f \in S_1$, on siis $\Lambda[f] = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx$.

$$\Rightarrow \Lambda[\hat{f}] = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(p)\, dp = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(p) \frac{dp}{2\pi}$$
$$\overset{\text{käänteism.}}{=} 2\pi f(0) = 2\pi \delta_0[f].$$

Näin ollen $\hat{\Lambda} = 2\pi \delta_0$. Tämä tulos ilmaistaan usein sanomalla, että
$$\delta(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ipx} \frac{dp}{2\pi}.$$

5) Distribuutioita voi yhdistää (riittävän säännöllisiin) muuttujanvaihtoihin.

Esim. Jos Λ_F on funktion F määräämä distribuutio ja $\varphi(x)$ on funktio, jolle $\varphi'(x) > 0$ kaikille x ja $\varphi(-\infty) = -\infty$, $\varphi(\infty) = \infty$, saadaan
$$\Lambda_F[f \circ \varphi^{-1}] = \int_{-\infty}^{\infty} F(x) f(\varphi^{-1}(x))\, dx$$
$y = \varphi^{-1}(x)$
$\Leftrightarrow x = \varphi(y)$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} F(\varphi(y)) f(y) \varphi'(y)\, dy = \Lambda_{F \circ \varphi}[f \varphi']$$

* Tätä käytetään erityisesti δ-funktion kanssa: Ottamalla yllä funktiojono $F_N \to \delta$ saadaan siis

edellinen laskη

$$\Lambda_{F_N\circ\varphi}[f] = \Lambda_{F_N\circ\varphi}\left[\frac{f}{\varphi'}\cdot\varphi'\right] \stackrel{\downarrow}{=} \Lambda_{F_N}\left[\frac{f}{\varphi'}\circ\varphi^{-1}\right]$$

$$\xrightarrow{N\to\infty} \frac{f(\varphi^{-1}(0))}{\varphi'(\varphi^{-1}(0))}.$$ Näin ollen

$$\delta(\varphi(x)) = \frac{1}{\varphi'(x_0)}\delta(x-x_0),$$ jossa

$x_0 = \varphi^{-1}(0)$ eli x_0 on yhtälön $\varphi(x_0)=0$ yksikäsitteinen ratkaisu.

* Tulosta voi yleistää muunkintyyppisiin muuttujanvaihtoihin: δ-funktion tapauksessa riittää, että muuttujanvaihdon $x=\varphi(y)$ voi tehdä jokaiselle yhtälön $\varphi(x_0)=0$ ratkaisulle x_0 jossain ratkaisun ympäristössä. Tätä varten riittää, että $\varphi'(x_0)\neq 0$, jolloin muuttujanvaihdosta tulee lisäkerroin $|\varphi'(x)|$.

Saadaan siis seuraava yleinen tulos, joka toimii aina kun φ on jatkuvasti derivoituva funktio ja yhtälöille $\varphi(x)=0$ ja $\varphi'(x)=0$ on vain äärellisen monta ratkaisua, jotka ovat erillisiä, eli ei löydy pistettä jossa $\varphi(x)=0=\varphi'(x)$. Tällöin

$$\delta(\varphi(x)) = \sum_{x_0:\,\varphi(x_0)=0} \frac{1}{|\varphi'(x_0)|}\delta(x-x_0)$$

(summa kulkee siis yhtälön $\varphi(x_0)=0$ kaikkien ratkaisujen yli).

Esim. a) $\delta(-x) = \frac{1}{|-1|}\delta(x) = \delta(x)$

b) $\delta(ax+b) = \frac{1}{|a|}\delta\left(x+\frac{b}{a}\right)$, kun $a\neq 0$.

c) Kun $a>0$, saadaan myös

$$\delta(x^2-a^2) = \frac{1}{|2a|}\delta(x-a) + \frac{1}{|2\cdot(-a)|}\delta(x+a) = \frac{1}{2a}\left(\delta(x-a)+\delta(x+a)\right).$$

* Seuraavat tavallisilla funktioilla toimivat operaatiot eivät enää ole (ainakaan ilman erillistä tarkistamista) sallittuja distribuutioille:

a) Kaikkia yhdistettyjä kuvauksia ei ole määritelty:
Esim.

$$\delta(x^2) = \frac{1}{|2x|}\delta(x) = \infty \cdot \delta(x) = ?$$

b) Distribuutioita <u>ei</u> yleensä saa kertoa keskenään:
Esim.

$$\delta(x)\cdot\delta(x) = \delta(0)\cdot\delta(x) = \infty\cdot\delta(x) = ?$$

Joskus distribuutioiden "tuloa" käytetään kyllä lyhennysmerkintänä: ks. seuraava sivu.

* Distribuutioista voi kyllä joskus ottaa <u>konvoluutioita</u>. Esim. $\delta_{\bar{r}_1} * \delta_{\bar{r}_2}$ määritellään

$$(\delta_{\bar{r}_1} * \delta_{\bar{r}_2})[f] = \int d^n\bar{r}'\, \delta(\bar{r}' - \bar{r}_1)\left[\int d^n\bar{r}\, \delta(\bar{r} - \bar{r}' - \bar{r}_2) f(\bar{r})\right]$$

$$= \int d^n\bar{r}'\, \delta(\bar{r}' - \bar{r}_1) f(\bar{r}' + \bar{r}_2) = f(\bar{r}_1 + \bar{r}_2).$$

* Ottamalla konvoluutioita sopivasti valitun testifunktiojonon kanssa saadaan myös oheinen käänteistulos s. 165. kaavalle:

Jos Λ on distribuutio, löytyy jono F_N, $N \in \mathbb{N}$, sileitä funktioita, joille pätee

$$\Lambda[f] = \lim_{N\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} f(\bar{r}) F_N(\bar{r})\, d^n\bar{r}$$

<u>kaikille</u> testifunktioille f.

* Tässä "sileä funktio" tarkoittaa funktiota, jolla on olemassa kaikkien kertalukujen derivaatat. Tätä voidaan merkitä $F_N \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$.

* Lyhyesti: Distribuutiota pystyy aina approksimoimaan sileän funktion määräämällä distribuutiolla.

* Vaikka distribuutioita ei saakaan kertoa keskenään, on joskus kätevä käyttää lyhennysmerkintää, joka muistuttaa tuloa.
Esim.

$$\delta(\bar{r}) = \delta(r_1)\,\delta(r_2)\,\delta(r_3)\,, \quad \bar{r} \in \mathbb{R}^3.$$

Tässä merkinnässä $\delta(\bar{r})$ vaatii 3-ulotteisen avaruuden testifunktion, mutta kukin $\delta(r_i)$ vain yksiulotteisen. Yhtälön oikea puoli luetaan siis

$$\int_{-\infty}^{\infty} dr_1\, \delta(r_1) \left(\int_{-\infty}^{\infty} dr_2\, \delta(r_2) \left(\int_{-\infty}^{\infty} dr_3\, \delta(r_3)\, f(r_1, r_2, r_3) \right)\right)$$

$$= \int dr_1\, \delta(r_1) \left(\int_{-\infty}^{\infty} dr_2\, \delta(r_2)\, f(r_1, r_2, 0) \right)$$

$$= \int dr_1\, \delta(r_1)\, f(r_1, 0, 0)$$

$$= f(0,0,0) = f(\bar{0}) = \int_{\mathbb{R}^3} d^3\bar{r}\, f(\bar{r})\, \delta(\bar{r}).$$

Vastaavasti voi δ-funktion esittää pallokoordinaateissa, kun $\bar{r}_0 \neq 0$, muodossa

$$d^3\bar{r}\, \delta(\bar{r}) = dr\, d\theta\, d\varphi\; r^2 \sin\theta\, \frac{1}{r_0^2}\, \delta(r-r_0)\, \delta(\cos\theta - \cos\theta_0)\, \delta(\varphi - \varphi_0)$$

sillä testifunktiolle $f \in \mathcal{S}_3$ saadaan oikeaa puolta käyttäen

$$\int_0^{\infty} dr \int_0^{\pi} d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi\; \sin\theta\, \frac{r^2}{r_0^2}\, \delta(r-r_0)\, \overbrace{\delta(\cos\theta - \cos\theta_0)}^{= \frac{1}{|-\sin\theta_0|}\delta(\theta-\theta_0)}\, \delta(\varphi-\varphi_0)$$
$$\times f(r(\cos\varphi \sin\theta, \sin\varphi\sin\theta, \cos\theta))$$

$$= \int_0^{\infty} dr \int_0^{\pi} d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi\; \delta(r-r_0)\, \delta(\theta-\theta_0)\, \delta(\varphi-\varphi_0)$$
$$\times \frac{\sin\theta}{\sin\theta_0}\, \frac{r^2}{r_0^2}\, f(r(\cos\varphi\sin\theta, \sin\varphi\sin\theta, \cos\theta))$$

$$= \frac{\sin\theta_0}{\sin\theta_0}\, \frac{r_0^2}{r_0^2}\, f(r_0(\cos\varphi_0\sin\theta_0, \sin\varphi_0\sin\theta_0, \cos\theta_0))$$

$$= f(\bar{r}_0) = \int d^3\bar{r}\, \delta(\bar{r}-\bar{r}_0)\, f(\bar{r}).$$

MAT) Yllä olevan testifunktioavaruuden S_n sijaan voi käyttää muitakin valintoja. Tavallisimmat ovat

1) $\mathcal{D}_n = \{ f \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \mid f(\bar{r}) = 0$ jonkin pallon ulkopuolella $\}$

Saadaan "tavallisten distribuutioiden" avaruus $\mathcal{D}_n'$. Avaruus $\mathcal{D}_n'$ on suurempi kuin S_n', mutta avaruudessa $\mathcal{D}_n'$ ei ole määritelty Fourier'n muunnosta.

2) Jos Ω on avoin osajoukko $\mathbb{R}^n$:stä, on yleensä pakko turvautua testifunktioihin $\mathcal{D}(\Omega) := \{ f \in C^\infty(\Omega) \mid f(\bar{r}) = 0$ jonkin Ω:n kompaktin osajoukon ulkopuolella $\}$. Tällöin $\mathcal{D}'(\Omega)$ on Ω:n tavallisten distribuutioiden avaruus.

3) Jos Fourier'n muunnoksen lisäksi voidaan luopua distribuutioiden <u>derivaatoista</u>, voidaan käyttää testifunktioavaruutta $C_c(\mathbb{R}^n) = \{ f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C} \mid f$ jatkuva ja häviää jonkin pallon ulkopuolella $\}$. Tämän avaruuden distribuutiot ovat kaikki ns. Radon-mittojen määräämiä. Tällä tavoin matematiikassa voi esim. δ-distribuution ymmärtää myös mittana.