Esim. 7.2. : Laske $\mathcal{L}[f]$, kun $f(t) = e^{zt}$, $z \in \mathbb{C}$ ?

$$F(s) = \mathcal{L}[f](s) = \int_0^\infty e^{-st} e^{zt}\, dt = \int_0^\infty e^{t(z-s)} dt$$

$$= \Big/_0^\infty \frac{1}{z-s} e^{t(z-s)} = 0 - \frac{1}{z-s} = \frac{1}{s-z}$$

kun $\operatorname{Re}(z-s) < 0 \iff \operatorname{Re} s > \operatorname{Re} z$.

( Jos $a > \operatorname{Re} z$, on myös $\int_0^\infty e^{-at} |f(t)|$

$$= \int_0^\infty e^{-at} e^{\operatorname{Re} z\, t} = \int_0^\infty e^{-(a - \operatorname{Re} z)t} < \infty.$$

Samoin, $\int_0^\infty e^{-2at} |f(t)|^2 < \infty$. )

Käänteismuunnos, jossa $\sigma > \operatorname{Re} z$,

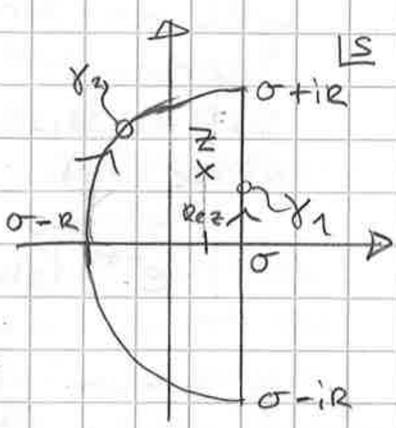
$$\mathcal{L}^{-1}[F](t) = \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} e^{ts} F(s) \frac{ds}{2\pi i}$$

$$= \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} e^{ts} \frac{1}{s-z} \frac{ds}{2\pi i}$$

Tässä integrandi $g(s) = \frac{e^{ts}}{s-z}$ on analyyttinen lukuunottamatta 1. kertaluvun napaa pisteessä $s = z$. Kun $t > 0$, ja $R > 0$ on riittävän suuri, voidaan residylausetta soveltaa käyrään $\gamma = \gamma_1 \dot{+} (-\gamma_2)$ kuten oheisessa kuvassa:

$\gamma_1(\rho) = \sigma + i\rho$, $\rho \in [-R, R]$

$\gamma_2(\phi) = \sigma - iRe^{-i\phi}$, $\phi \in [0, \pi]$




Huomaa, että $\gamma_2(0) = \sigma - iR = \gamma_1(-R)$ ja $\gamma_2(\pi) = \sigma + iR = \gamma_1(R)$, joten käyrä $\gamma$ on suljettu. Lisäksi, koska $\operatorname{Re} z < \sigma$, kulkee käyrä $\gamma$ navan $s = z$ ympäri kerran positiviseen kiertosuuntaan. Residylauseen perusteella siis

$$\int_\gamma \frac{e^{ts}}{s-z}\,\frac{ds}{2\pi i} = \frac{1}{\cancel{2\pi i}}\cdot \cancel{2\pi i}\,\operatorname*{Res}_{s=z}\frac{e^{ts}}{s-z}$$

1 kl. napa (Lause 3.3)

$$\overset{\downarrow}{=} \lim_{s\to z} \frac{e^{ts}}{\frac{d}{ds}(s-z)} = \frac{e^{tz}}{1} = e^{tz}$$

aina, kun $R$ on riittävän suuri.

Käyrän $\gamma_2$ yli otettu integraali antaa

$$\int_{\gamma_2}\frac{e^{ts}}{s-z}\,ds = \int_0^\pi \frac{e^{t(\sigma - iRe^{-i\phi})}}{\sigma - iRe^{-i\phi}-z}(-iR)\cdot(-i)e^{-i\phi}\,d\phi$$

$$\overset{\varphi=\pi-\phi}{=} \int_0^\pi \frac{e^{t(\sigma - iRe^{-i(\pi-\varphi)})}}{\sigma - z - iR\underbrace{e^{-i(\pi-\varphi)}}_{=-e^{i\varphi}}}(-R)(-e^{i\varphi})\,d\varphi$$

$$= \int_0^\pi \frac{e^{t\sigma}e^{+itRe^{i\varphi}}}{\sigma - z + iRe^{i\varphi}}\,Re^{i\varphi}\,d\varphi$$

$$\overset{w=Re^{i\varphi}}{=} \int g(w)\,e^{itw}\,\frac{dw}{i} \to 0 \quad \text{kun } R\to\infty$$

Jordanin lemman (Lause 3.7.) mukaan, sillä $t>0$ ja

$$g(w) = \frac{e^{t\sigma}}{\sigma - z + iw}, \text{ jolle pätee}$$

$$|g(w)| \le \frac{e^{t\sigma}}{|w|-|\sigma-z|} \overset{w=Re^{i\varphi}}{=} \frac{e^{t\sigma}}{R-|\sigma-z|} \to 0 \quad \text{kun } R\to\infty.$$

(Kolmioepäyhtälön perusteella nähdään, että $|\sigma - z + iw| \ge \big||iw| - |\sigma-z|\big| \ge |w| - |\sigma - z| > 0$, kun $R$ riittävän suuri.)

Näin ollen saadaan

$$\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{ts}\frac{1}{s-z}\frac{ds}{2\pi i} = \lim_{R\to\infty}\int_{\gamma_1}\frac{e^{ts}}{s-z}\frac{ds}{2\pi i}$$

$$\overset{\int_{\gamma_2}\dots\to 0}{=} \lim_{R\to\infty}\int_{\gamma}\frac{e^{ts}}{s-z}\frac{ds}{2\pi i} = e^{tz}, \text{ kun } t>0.$$

Jos $t<0$, voidaan Jordanin lemmaa soveltaa käyttäen käyrää $\gamma_3(\phi)=\sigma-iRe^{+i\phi}$, $\phi\in[0,\pi]$, käyrän $\gamma_2$ tilalla. Tällöin suljetun polun $\tilde{\gamma}=\gamma_1\dot{+}(-\gamma_3)$ sisään ei jää laisinkaan singulariteetteja, joten

$$\int_{\tilde{\gamma}}\frac{e^{ts}}{s-z}\frac{ds}{2\pi i}=0$$

$$\Rightarrow \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\frac{e^{ts}}{s-z}\frac{ds}{2\pi i}=0, \text{ kun } t<0.$$

Nähtiin siis miten Laplacen käänteismuunnos-kaava toimii "käytännössä".

* Yllä saatiin $\mathcal{L}[e^{zt}](s)=\dfrac{1}{s-z}$, kun $z\in\mathbb{C}$.

Erityisesti siis, kun $z=0$, saadaan vakiofunktion Laplacenmuunnos $\mathcal{L}[1](s)=\dfrac{1}{s}$.

Esim. 7.3. Mikä on potenssifunktion $f(t)=t^p$, $p\in\mathbb{C}$, Laplacen muunnos?

Tässä siis $t^p=\exp(p\ln t)$, $t>0$, joten $|t^p|=\exp(\operatorname{Re}p\cdot\ln t)=t^{\operatorname{Re}p}$, ja näin ollen

$$\int_0^\infty e^{-at}|t^p|\,dt<\infty \quad \text{kun } a>0 \text{ ja } \operatorname{Re}p>-1.$$

Lähdetään liikkeelle reaalisista arvoista $p>0$.

Kun $s>0$, saadaan muuttujanvaihdolla

$$F(s) = \int_0^\infty t^p e^{-st}\, dt \overset{r=st}{=} \int_0^\infty \left(\frac{r}{s}\right)^p e^{-r} \frac{dr}{s}$$

$$= \frac{1}{s^{1+p}} \int_0^\infty e^{-r} r^{p+1-1}\, dr = \frac{\Gamma(p+1)}{s^{p+1}}.$$

Tämän funktion analyyttinen jatko alueeseen $s \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ on siis

$$F(s) = \Gamma(p+1) \exp\left(-(p+1)\,\overline{\ln}\, s\right),$$

jossa $\overline{\ln}$ on logaritmin päähaara, jolla on leikkaus negatiivisella reaaliakselilla.

Samoin $F(s)$:n määrittelevä integraali on analyyttinen myös muuttujassa $p$, aivan kuten $\Gamma$-funktiokin.

Saatiin siis $\mathcal{L}[t^p](s) = \dfrac{\Gamma(p+1)}{s^{p+1}}$, kun $\operatorname{Re} p > -1$ ja $\operatorname{Re} s > 0$.

* Laplacen muunnos (samoin kuin Fourier'n muunnoskin) on <u>lineaarinen</u> funktiossa $f$.

Eli, jos $a, b \in \mathbb{C}$ ja $f, g$ ovat funktioita, joilla on olemassa Laplacen muunnokset $\mathcal{L}[f]$ ja $\mathcal{L}[g]$, niin myös funktiolla

$$(af+bg)(t) = a f(t) + b g(t)$$

on Laplacen muunnos, ja pätee

$$\mathcal{L}[af+bg] = a\mathcal{L}[f] + b\mathcal{L}[g].$$

(Seuraa suoraan integraalien perusominaisuuksista.)

Esim. 7.4. Mikä on $f(t) = \sin(\omega t)$, $\omega \in \mathbb{C}$, Laplacen muunnos?

Koska $f(t) = \frac{1}{2i} e^{i\omega t} - \frac{1}{2i} e^{-i\omega t}$

saadaan Esim. 7.2. ja lineaarisuuden perusteella:

$$\mathcal{L}[f](s) = \frac{1}{2i}\mathcal{L}[e^{i\omega t}] - \frac{1}{2i}\mathcal{L}[e^{-i\omega t}]$$

$$= \frac{1}{2i}\frac{1}{s-i\omega} - \frac{1}{2i}\frac{1}{s-(-i\omega)} = \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{s-i\omega} - \frac{1}{s+i\omega}\right)$$

$$= \frac{1}{2i}\frac{s+i\omega-(s-i\omega)}{(s-i\omega)(s+i\omega)} = \frac{1}{2i}\frac{2i\omega}{s^2+\omega^2} = \frac{\omega}{s^2+\omega^2}.$$

* Huomataan, että tämä funktio vähenee nopeammin, $O(|s|^{-2})$, kuin exponenttifunktion Laplacen muunnos, joka on vain $O(|s|^{-1})$, kun $|s| \to \infty$. Syy tähän löytyy siitä, että kun $t=0$ on $\sin(\omega 0) = 0$, joten sen jatkaminen nollalla negatiivisille arvoille (funktio "g" sivulla 142), tuottaa jatkuvan funktion. Koska $e^{zt} = 1$, kun $t=0$, on vastaava jatko exponenttifunktiolle aina epäjatkuva origossa.

* Derivaatan Fourier'n muunnos oli helppo. Miten käy Laplacen muunnoksessa?

Taas osittaisintegroimalla:

$$\mathcal{L}[f'](s) = \int_0^\infty e^{-st} f'(t)\,dt$$

$$= \Big/_0^\infty e^{-st} f(t) - \int_0^\infty (-s) e^{-st} f(t)\,dt$$

$$= 0 - f(0^+) + s\int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt$$

$$= s\,\mathcal{L}[f](s) - f(0^+).$$

Saadaan siis tulos, että jos $f$ ja $f'$:n Laplacen muunnos on olemassa ja $f$:n oikeanpuoleinen raja-arvo origossa, $f(0^+)$, on myös olemassa, niin pätee

$$\mathcal{L}[f'](s) = s\,\mathcal{L}[f](s) - f(0^+).$$

* Erityisesti, jos $f(0)=0$, joka pätee aina kun

$$f(t) = \int_0^t f'(\tau)\,d\tau,$$

saadaan $\mathcal{L}[f'] = s\,\mathcal{L}[f]$.

* Muunnos erityisen hyödyllinen ratkaistaessa diff. yhtälöitä reunaehdoilla $f(0) = $ vakio.

* Sivun 64 tuloksen mukaan, on Laplacen muunnoksen $F = \mathcal{L}[f]$ derivaatta

$$F'(s) = \int_0^\infty \frac{d}{ds}\left(e^{-st} f(t)\right) dt = \int_0^\infty (-t) e^{-st} f(t)\,dt$$

$= \mathcal{L}[-tf(t)](s)$, aina kun $\mathrm{Re}\, s > a$. ($a$ on s. 142 vakio, eli sillä pätee $\int_0^\infty e^{-at}|f(t)|\,dt < \infty$.)

$$\Rightarrow \frac{d}{ds}\mathcal{L}[f(t)](s) = \mathcal{L}[-tf(t)](s).$$

* Sovellus: Esim. 7.5. Laske $\mathcal{L}[t^n e^{at}]$, kun $n \in \mathbb{N}$ ja $a \in \mathbb{C}$.

Esim. 7.2:n mukaan $\mathcal{L}[e^{at}] = \dfrac{1}{s-a}$.

$$\Rightarrow \frac{d}{ds}\mathcal{L}[e^{at}](s) = \mathcal{L}[-te^{at}] = \frac{-1}{(s-a)^2}$$

Iteroimalla tätä $n$ kertaa, saadaan

$$\frac{d^n}{ds^n}\mathcal{L}[e^{at}](s) = \mathcal{L}\left[(-t)^n e^{at}\right] = \frac{(-1)\cdot(-2)\cdots(-n)}{(s-a)^{n+1}}$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}[t^n e^{at}](s) = \frac{(-1)^n \cdot (-1)^n \cdot n!}{(s-a)^{n+1}} = \frac{n!}{(s-a)^{n+1}}.$$

* Integraalifunktion Laplacen muunnos:

Kun $g(t) = \int_0^t f(\tau)\,d\tau$, saadaan

$$\mathcal{L}[g](s) = \int_0^\infty dt\, e^{-st} \int_0^t f(\tau)\,d\tau$$

$$= \int_0^\infty dt\, e^{-st} \int_0^\infty d\tau\, \mathbb{1}(\tau \le t)\, f(\tau)$$

$$= \int_0^\infty d\tau \int_0^\infty dt\, \mathbb{1}(\tau \le t)\, e^{-st} f(\tau)$$

$$= \int_0^\infty d\tau \underbrace{\int_\tau^\infty dt\, e^{-st}}_{= \Big/_\tau^\infty \frac{1}{-s} e^{-st} = \frac{1}{s} e^{-s\tau} \text{ (kun Re } s > 0)} f(\tau)$$

$$= \frac{1}{s} \int_0^\infty d\tau\, e^{-s\tau} f(\tau) = \frac{1}{s} \mathcal{L}[f](s)$$

(Tätä laskua varten riittää, että Re $s > 0$ ja Re $s > a$.)

$$\Rightarrow \mathcal{L}\left[\int_0^t f(\tau)\,d\tau\right](s) = \frac{1}{s} \mathcal{L}[f](s)$$

* Laplacen muunnoksen $F$ integraalifunktio saadaan yhtä helposti, kunhan $F$ vähenee riittävän nopeasti, kun $s \to \infty$. Nimittäin

$$\int_s^\infty ds'\, F(s') = \int_s^\infty ds' \int_0^\infty dt\, e^{-s't} f(t)$$

$$= \int_0^\infty dt\, f(t) \underbrace{\int_s^\infty ds'\, e^{-s't}}_{= \Big/_s^\infty \frac{1}{-t} e^{-s't} \overset{t>0}{=} \frac{1}{t} e^{-st}}$$

$$= \int_0^\infty dt\, f(t) \frac{1}{t} e^{-st} = \mathcal{L}\left[\frac{1}{t} f(t)\right](s)$$

Lasku toimii, kunhan $\int_0^\infty dt\, \frac{|f(t)|}{t} e^{-st} < \infty$.

Tätä varten täytyy olla vähintään, että $\lim_{t\to 0^+} |f(t)| = 0$. Saadaan siis seuraava tulos: Jos $f(t)$ menee riittävän nopeasti kohti nollaa, kun $t \to 0$, jotta $\int_0^\infty \frac{|f(t)|}{t} e^{-at} < \infty$, pätee $\mathcal{L}\left[\frac{f(t)}{t}\right](s) = \int_s^\infty ds' \, \mathcal{L}[f](s')$, kun $s > a$.

* Esim. 7.6. Lasketaan $\mathcal{L}[f]$, kun $f(t) = \frac{e^{at} - e^{bt}}{t}$, ja $a, b \in \mathbb{R}$, $a > b$.

Tässä $f(0^+) = a - b$, jotin $f$ on integroituva.

Saadaan siis (kun $s > a$)

$$\mathcal{L}[f](s) = \mathcal{L}\left[\frac{1}{t}(e^{at} - e^{bt})\right](s) = \int_s^\infty ds' \, \mathcal{L}[e^{at} - e^{bt}](s').$$

Tässä $\mathcal{L}[e^{at} - e^{bt}](s) = \mathcal{L}[e^{at}](s) - \mathcal{L}[e^{bt}](s)$

$$\overset{\text{Esim. 6.2.}}{=} \frac{1}{s-a} - \frac{1}{s-b}, \text{ jolle pätee, aina kun } R > s > a,$$

$$\int_s^R ds' \left(\frac{1}{s'-a} - \frac{1}{s'-b}\right) = \Big/_s^R \left(\ln(s'-a) - \ln(s'-b)\right)$$

$$= \Big/_s^R \ln\frac{s'-a}{s'-b} = \ln\frac{R-a}{R-b} - \ln\frac{s-a}{s-b}$$

$$\xrightarrow{R\to\infty} \ln 1 - \ln\frac{s-a}{s-b} = \ln\frac{s-b}{s-a}.$$

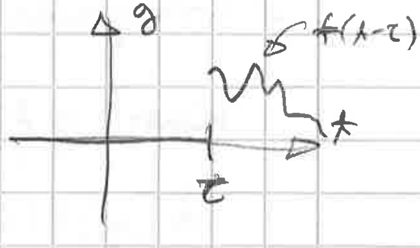
Näin ollen $\mathcal{L}[f](s) = \lim_{R\to\infty} \int_s^R ds' \, \mathcal{L}[e^{at} - e^{bt}](s')$

$$= \ln\frac{s-b}{s-a}.$$

* "Viivästyneen" funktion Laplacen muunnos:

On annettu $\tau > 0$ ja $f(t)$, $t > 0$. Määritellään

$$g(t) = \begin{cases} f(t-\tau), & \text{kun } t > \tau \\ 0, & \text{kun } t < \tau \end{cases}$$




Tällöin

$$\mathcal{L}[g](s) = \int_\tau^\infty e^{-st} f(t-\tau)\,dt \overset{r=t-\tau}{=} \int_0^\infty e^{-s(r+\tau)} f(r)\,dr$$

$$= e^{-s\tau} \int_0^\infty e^{-sr} f(r)\,dr = e^{-s\tau} \mathcal{L}[f](s),$$

eli $\mathcal{L}[f(t-\tau)\mathbb{1}(t>\tau)](s) = e^{-s\tau}\mathcal{L}[f](s)$,

kunhan $\operatorname{Re} s > a$, ja $\tau > 0$.

* Samalla tavalla saadaan $\mathcal{L}[e^{\alpha t} f(t)] = \mathcal{L}[f](s-\alpha)$, kun $\operatorname{Re}(s-\alpha) > a$, sillä tällöin

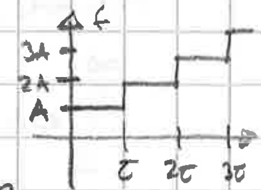
$$\mathcal{L}[f](s-\alpha) = \int_0^\infty e^{-(s-\alpha)t} f(t)\,dt = \int_0^\infty e^{-st} e^{\alpha t} f(t)\,dt.$$

Esim. 7.7: "Portaikkofunktion" ($\tau, A > 0$)

$$f(t) = A\left[\theta(t) + \theta(t-\tau) + \theta(t-2\tau) + \dots\right],$$

$\theta(t) = \mathbb{1}(t>0)$ = Heavisiden askelfunktio,

Laplacen muunnos on, kun $s > 0$,




$$\mathcal{L}[f](s) = A \sum_{n=0}^\infty \mathcal{L}[\theta(t-n\tau)](s)$$

$$= A \sum_{n=0}^\infty e^{-n\tau s} \underbrace{\mathcal{L}[1](s)}_{=\frac{1}{s}} = \frac{A}{s} \sum_{n=0}^\infty \big(\underbrace{\overbrace{e^{-\tau s}}^{>0}}_{<1}\big)^n$$

$$= \frac{A}{s} \frac{1}{1-e^{-\tau s}} \Rightarrow \mathcal{L}[f](s) = \frac{A}{s}\frac{1}{1-e^{-\tau s}}, \text{ kun } \operatorname{Re} s > 0.$$

* **Esim. 7.8.** Laske $\mathcal{L}\left[e^{-\gamma t}\sin(\omega t)\right](s)$, kun $\omega, \gamma \in \mathbb{R}$.

Nyt kun $\operatorname{Re} s > -\gamma$, saadaan

$$\mathcal{L}\left[e^{-\gamma t}\sin(\omega t)\right](s) \overset{\text{s. 152}}{\overset{!}{=}} \mathcal{L}\left[\sin(\omega t)\right](s-(-\gamma))$$

$$\overset{\text{Esim 7.4.}}{=} \left.\frac{\omega}{s'^2+\omega^2}\right|_{s'=s+\gamma} = \frac{\omega}{(s+\gamma)^2+\omega^2}.$$

## Konvoluutiot ja Laplacen muunnos

* Jotta konvoluution $g_1 * g_2$ Laplacen muunnos olisi helppo, pitää tässä ottaa "jatkeita" $g(x)$, $x \in \mathbb{R}$, eli funktioita, joilla $g(x) = 0$ kun $x \leq 0$. Tällöin, kun $t > 0$, saadaan

$$(g_1 * g_2)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g_1(\underbrace{t-\tau}_{>0})\, g_2(\underbrace{\tau}_{>0})\, d\tau$$

$$= \int_0^t g_1(t-\tau) g_2(\tau)\, d\tau.$$

Kun $f_1(t)$, $f_2(t)$, $t > 0$, on annettu, kokeillaan siis laskea seuraava Laplacen muunnosta

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f_1(t-\tau) f_2(\tau)\, d\tau\right](s)$$

$$= \int_0^\infty dt\, e^{-st} \int_0^\infty d\tau\, \mathbb{1}(\tau < t)\, f_1(t-\tau) f_2(\tau)$$

$$= \int_0^\infty d\tau\, f_2(\tau) \int_0^\infty dt\, \mathbb{1}(\tau < t)\, f_1(t-\tau) e^{-st}$$

$$= \int_0^\infty d\tau\, f_2(\tau) \int_\tau^\infty dt\, e^{-st} f_1(t-\tau)$$

$$\overset{r = t-\tau}{=} \int_0^\infty d\tau\, f_2(\tau) \int_0^\infty dr\, e^{-s(r+\tau)} f_1(r)$$

$$= \int_0^\infty d\tau\, f_2(\tau) e^{-s\tau} \int_0^\infty dr\, e^{-sr} f_1(r)$$

$$= \mathcal{L}[f_2](s)\, \mathcal{L}[f_1](s)$$

Eli tämä konvoluutio toimii juuri niin kuin Fourier'n muunnoksen: kun $F_1 = \mathcal{L}[f_1]$ ja $F_2 = \mathcal{L}[f_2]$,

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f_1(t-\tau) f_2(\tau)\, d\tau\right](s) = F_1(s) F_2(s).$$

* Tulon Laplacen muunnos on jo vähän hankalampi:

Olkoon $a$ <u>suurempi</u> niistä vakioista, joilla

funktiot $f_1$ ja $f_2$ toteuttavat s. 142 ehdot.
Merkitään $F_1 = \mathcal{L}[f_1]$ ja $F_2 = \mathcal{L}[f_2]$.
Tällöin, jos $\sigma > a$ ja $\mathrm{Re}\, s > a + \sigma$, saadaan käänteiskaavasta

$$\mathcal{L}[f_1 f_2](s) = \int_0^\infty e^{-st} f_1(t) f_2(t)\, dt$$

$$= \int_0^\infty e^{-st} f_2(t) \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} e^{ts'} F_1(s') \frac{ds'}{2\pi i}$$

$$= \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \frac{ds'}{2\pi i} F_1(s') \underbrace{\int_0^\infty e^{-(s-s')t} f_2(t)}_{= F_2(s-s')}$$

$$= \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} F_1(s') F_2(s-s') \frac{ds'}{2\pi i}$$

* Seuraavalla sivulla on yhteenveto yo. tuloksista.
Lisää tietoa löytyy engl. kielisestä Wikipediasta, kohdasta "Laplace transform".

# Taulukko Laplace-muunnoksista

| $f(t)$ $\xleftarrow{\mathcal{L}^{-1}}$ | $\xrightarrow{\mathcal{L}}$ $F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt$ |
|---|---|
| $\Theta(t)$ | $\frac{1}{s}$ |
| $e^{at}$ | $\frac{1}{s-a}$ |
| $t^p$ $(\mathrm{Re}\, p > 0)$ | $\frac{\Gamma(p+1)}{s^{p+1}}$ |
| $\sin \omega t$ | $\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$ |
| $\cos \omega t$ | $\frac{s}{s^2+\omega^2}$ |
| $f'(t)$ | $sF(s) - f(0)$ |
| $-t \cdot f(t)$ | $F'(s)$ |
| $t^n e^{at}$ | $\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$ |
| $\int_0^t f(\tau)\,d\tau$ | $\frac{1}{s} F(s)$ |
| $\frac{f(t)}{t}$ | $\int_s^\infty F(s')\,ds'$ |
| $\frac{e^{at} - e^{bt}}{t}$ | $\ln \frac{s-b}{s-a}$ |
| $f(t-\tau)$ | $e^{-s\tau} F(s)$ |
| $e^{at} f(t)$ | $F(s-a)$ |
| portaikko $\sum_{n=0}^{\infty} \Theta(t-n\tau)$ | $\frac{1}{s} \cdot \frac{1}{1-e^{-s\tau}}$ |
| $e^{-\gamma t} \sin \omega t$ | $\frac{\omega}{(s+\gamma)^2+\omega^2}$ |
| $(f*g)(t) \equiv \int_0^t f(\tau) g(t-\tau)\,d\tau$ | $F(s)G(s)$ |
| $f(t) \cdot g(t)$ | $\frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma'-i\infty}^{\sigma'+i\infty} ds'\, F(s') G(s-s')$ |

$\sigma' \equiv \mathrm{Re}\, s'$ = vakio, imag. akselin suuntainen integraali

# 7.3. Kaksi Laplacen muunnoksen sovellusta

## Esim. 7.9. Diff. yhtälön ratkaiseminen

Olkoot $a, b > 0$ annettu. Ratkaise seuraava "pakotetun oskillaattorin" differentiaaliyhtälö:

$$\ddot{x}(t) + a^2 x(t) = b \sin(at),$$

kun $x(0) = x_0$ ja $\dot{x}(0) = v_0$ ; $x_0, v_0 \in \mathbb{R}$ annettu.

Ratkaisu: Merkitään $F = \mathcal{L}[x(t)]$. Tällöin (s. 148)

$$\mathcal{L}[\dot{x}(t)](s) = s\,\mathcal{L}[x(t)](s) - x(0) = sF(s) - x_0$$

ja $\mathcal{L}[\ddot{x}(t)](s) = s\,\mathcal{L}[\dot{x}(t)](s) - \dot{x}(0)$
$= s\,(sF(s) - x_0) - x_1 = s^2 F(s) - x_1 - x_0 s.$

Koska $\mathcal{L}[\sin(at)](s) = \frac{a}{s^2+a^2}$ (Esim. 7.4.),

toteuttaa $F$ yhtälön

$$\mathcal{L}[\ddot{x} + a^2 x] = s^2 F(s) - x_1 - x_0 s + a^2 F(s) = b\,\frac{a}{s^2+a^2}$$

$$\Leftrightarrow \quad F(s) = \frac{x_1 + x_0 s}{s^2+a^2} + \frac{ab}{(s^2+a^2)^2}$$

Lasketaan käänteismuunnos käyttäen edellä johdettuja tuloksia, termi kerrallaan:

$$\mathcal{L}^{-1}\Big[\frac{x_1}{s^2+a^2}\Big](t) = \frac{x_1}{a}\,\mathcal{L}^{-1}\Big[\frac{a}{s^2+a^2}\Big](t) = \frac{x_1}{a}\cdot \sin(at)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\Big[\frac{x_0 s}{s^2+a^2}\Big](t) = \frac{x_0}{a}\,\mathcal{L}^{-1}\Big[s \cdot \frac{a}{s^2+a^2}\Big](t)$$

Tässä $s \cdot \frac{a}{s^2+a^2} = s\,\mathcal{L}[g](s) - g(0)$, kun $g(t) = \sin(at)$.
($\Rightarrow g(0) = 0$).

s. 148

(157)

$$\Rightarrow \mathcal{L}^{-1}\left[s \cdot \frac{a}{s^2+a^2}\right](t) \overset{b}{=} \frac{d}{dt}\sin(at) = a\cos(at)$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{x_0 s}{s^2+a^2}\right](t) = \frac{x_0}{a} \cdot a\cos(at) = x_0\cos(at).$$

Viimeisen termin käänteismuunnos on vähän työläämpi. Lasketaan se käyttäen s. 154 konvoluutiokaavaa, kun $G = \mathcal{F}[g]$.

$$\Rightarrow G(s)^2 = \frac{a^2}{(s^2+a^2)^2} = \mathcal{L}\left[\int_0^t g(\tau)\, g(t-\tau)\, d\tau\right](s)$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{a^2}{(s^2+a^2)^2}\right](t) = \int_0^t g(\tau)\, g(t-\tau)\, d\tau$$

$$= \int_0^t \sin(a\tau)\sin(at-a\tau)\, d\tau.$$

$$= \int_0^t \frac{1}{(2i)^2}\left(e^{ia\tau}-e^{-ia\tau}\right)\left(e^{i(at-a\tau)}-e^{-i(at-a\tau)}\right) d\tau$$

$$= -\frac{1}{4}\int_0^t \left(e^{iat}-e^{-iat+2ia\tau}-e^{iat-2ia\tau}+e^{-iat}\right) d\tau$$

$$= -\frac{1}{4}\left(e^{iat}+e^{-iat}\right)\int_0^t d\tau$$

$$+\frac{1}{4}\int_0^t \underbrace{\left(e^{i(2a\tau-at)}+e^{-i(2a\tau-at)}\right)}_{=2\cos(2a\tau-at)} d\tau$$

$$= -\frac{1}{2}\cos(at)\cdot t + \frac{1}{2}\Big/_0^t \frac{1}{2a}\sin(2a\tau-at)$$

$$= -\frac{t}{2}\cos(at) + \frac{1}{4a}\left(\sin(\underbrace{2at-at}_{=at}) - \sin(-at)\right)$$

$$= -\frac{t}{2}\cos(at) + \frac{1}{2a}\sin(at)$$

Näin ollen

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}[F](t) = \frac{x_1}{a}\sin(at) + x_0\cos(at)$$

$$+\frac{b}{a}\cdot\left(-\frac{t}{2}\cos(at) + \frac{1}{2a}\sin(at)\right)$$

$$\Rightarrow \quad x(t) = \left(\frac{x_1}{a} + \frac{b}{2a^2}\right)\sin(at) + \left(x_0 - \frac{b}{2a}t\right)\cos(at).$$

Tässä ehkä vähän yllättävä lineaarisesti kasvava termi $-\frac{b}{2a}t\cos(at)$, johtuu oskillaattorin "pakottamisesta", jonka voi ajatella lisäävän koko ajan oskillaattorin "energiaa". (Jos pakottaminen poistetaan asettamalla $b=0$, myös lineaarinen termi poistuu.)

Esim. 7.10: Integraalin laskeminen Laplacen muunnoksen avulla:

Olkoon $I(t) = \int_0^\infty \frac{1-\cos(xt)}{x^2}\,dx, \quad t \in \mathbb{R}$.

Valitaan jokin $s>0$, jolloin

$$\int_0^\infty e^{-st} I(t)\,dt = \int_0^\infty dx\, \frac{1}{x^2} \underbrace{\int_0^\infty e^{-st}(1-\cos(xt))\,dt}_{= \mathcal{L}[1](s) - \mathcal{L}[\cos(xt)](s)}$$

Tässä $\mathcal{L}[1](s) = \frac{1}{s}$ ja

$$\mathcal{L}[\cos(xt)](s) = \frac{1}{2}\left(\mathcal{L}[e^{ixt}](s) + \mathcal{L}[e^{-ixt}](s)\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-ix} + \frac{1}{s+ix}\right) = \frac{1}{2}\,\frac{s+ix+s-ix}{s^2+x^2} = \frac{s}{s^2+x^2}.$$

(Kuten myös s. 157 ylälaidassa huomattiin.)

Näin ollen $\mathcal{L}[I](s) = \int_0^\infty dx\, \frac{1}{x^2}\left(\frac{1}{s} - \frac{s}{s^2+x^2}\right)$

$$= \int_0^\infty dx\, \frac{1}{x^2}\, \frac{\cancel{s^2}+x^2-\cancel{s^2}}{s(s^2+x^2)} = \frac{1}{s}\int_0^\infty \frac{dx}{s^2+x^2}$$

$$\overset{r=\frac{x}{s}}{=} \frac{1}{s}\int_0^\infty \frac{s}{s^2(1+r^2)}\,dr = \frac{1}{s^2}\int_0^\infty \frac{dr}{1+r^2}$$

Esim. 3.9:ssä on residyjen avulla laskettu

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dr}{1+r^2} = \pi \overset{\text{parillisuus}}{=} 2\int_0^{\infty} \frac{dr}{1+r^2}$$

$\Rightarrow \int_0^{\infty} \frac{dr}{1+r^2} = \frac{\pi}{2}$, joten saatiin (kun $s>0$)

$$\mathcal{L}[I](s) = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{s^2} = -\frac{\pi}{2}\frac{d}{ds}F(s),$$

kun $F(s) = \frac{1}{s} = \mathcal{L}[1](s)$. Sivun 149 tuloksen mukaan siis $\mathcal{L}[I](s) = \mathcal{L}\left[\left(-\frac{\pi}{2}1\right)\cdot(-t)\right](s) = \mathcal{L}\left[\frac{\pi}{2}t\right](s)$

$\Rightarrow I(t) = \frac{\pi}{2}t$, kun $t>0$.

Koska selvästi $I(-t) = I(t)$, saadaan lopulta tulos

$$I(t) = \frac{\pi}{2}|t|, \quad t \in \mathbb{R}.$$