$$\Rightarrow \hat{f}(\bar{p}) = \frac{2\pi i}{p}\left[\frac{1}{(a+ip)^2} - \frac{1}{(a-ip)^2}\right]$$

$$= \frac{2\pi i}{p}\,\frac{(a-ip)^2-(a+ip)^2}{(a+ip)^2((a+ip)^*)^2} = \frac{2\pi i}{p}\,\frac{\cancel{a^2}-\cancel{p^2}-2iap-(\cancel{a^2}-\cancel{p^2}+2iap)}{(\underbrace{|a+ip|^2}_{=a^2+p^2})^2}$$

$$= \frac{2\pi i}{\cancel{p}}\,\frac{-4ia\cancel{p}}{(a^2+p^2)^2} = \frac{8\pi a}{(a^2+p^2)^2}, \quad p = |\bar{p}|. \qquad \square$$

* Aiemmin nähtiin, että parillisuus säilyi 1-ulotteisissa Fourier'n muunnoksissa. Sama pätee myös moniulotteisille muunnoksille:

Jos $f(-\bar{x}) = f(\bar{x})$, on $\hat{f}(-\bar{p}) = \hat{f}(\bar{p})$.

* Kuten Esim. 6.4:ssä, säilyttää F-muunnos myös rotaatioinvarianssin. Eli,

Jos $f(R\bar{x}) = f(\bar{x})$ kaikilla rotaatiomatriiseilla R, pätee myös

$$\hat{f}(R\bar{p}) = \hat{f}(\bar{p}) \text{ kaikilla } R.$$

* Jos f on rotaatioinvariantti, löytyy aina funktio $\varphi(r)$, $r \geq 0$, jolle

$$f(\bar{x}) = \varphi(|\bar{x}|) \quad \forall \bar{x} \in \mathbb{R}^n.$$

Koska tällöin myös $\hat{f}$ on rotaatioinvariantti, löytyy myös funktio $\psi(r)$, $r \geq 0$, jolle

$$\hat{f}(\bar{p}) = \psi(|\bar{p}|) \quad \forall \bar{p} \in \mathbb{R}^n.$$

Huomaa, että tässä <u>ei</u> yleensä päde $\psi = \hat{\varphi}$. Vrt. Esim. 6.2 & 6.4.:

Molemmissa $f(\bar{x}) = e^{-a|\bar{x}|}$, joten $\varphi(r) = e^{-ar}$. Toisaalta 1-ul. tapauksessa

$$\hat{f}(p) = \frac{2a}{|\bar{p}|^2+a^2} \Rightarrow \psi(r) = \frac{2a}{r^2+a^2}$$

ja 3-ul. tapauksessa

$$\hat{f}(\bar{p}) = \frac{8\pi a}{(|\bar{p}|^2+a^2)^2} \Rightarrow \psi(r) = \frac{8\pi a}{(r^2+a^2)^2} \neq \hat{\varphi}(r)$$

Lisä) Yo. invarianssin säilymisen johto:

Olkoon joko $A\bar{x} = -\bar{x}$, eli $A = -\mathbb{1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & -1 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & -1 & \\ \vdots & \vdots & & \end{pmatrix}$

tai A = rotaatiomatriisi. Molemmissa tapauksissa pätee $A^{-1} = A^T$, joten joko $A^T = A$ tai A^T on myös rotaatiomatriisi. Erityisesti siis,
$\mathbb{1} = A^T A$, joten $1 = \det(\mathbb{1}) = \det(A^T A)$
$= \det A^T \cdot \det A = (\det A)^2$
$\Rightarrow \det A = \pm 1 \Rightarrow |\det A| = 1 = |\det A^T|$

Näin ollen, kun F-muunnoksen määrittelevään integraaliin tehdään muuttujanvaihto $\bar{x} = A^T\bar{y}$, saadaan tulos

$$\hat{f}(\bar{p}) = \int_{\mathbb{R}^n} d^n\bar{x}\, e^{-i\bar{p}\cdot\bar{x}} f(\bar{x}) \Big|_{\bar{x}=A^T\bar{y}}$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} d^n\bar{y}\, \underbrace{|\det A^T|}_{=1}\, e^{-i\bar{p}\cdot A^T\bar{y}}\, \underbrace{f(A^T\bar{y})}_{\overset{*}{=} f(\bar{y})}$$

$*$ invarianssioletus

$$= \int d^n\bar{y}\, e^{-iA\bar{p}\cdot\bar{y}} f(\bar{y}) = \hat{f}(A\bar{p})$$

eli myös $\hat{f}$ on invariantti. Funktion φ löytää rotaatioinvariantissa tapauksessa valitsemalla A = rotaatio, joka kääntää vektorin $\bar{x}$ (esim.) 1-akselin suuntaiseksi, eli $A\bar{x} = (|\bar{x}|, 0, 0, \ldots) = |\bar{x}|\hat{e}_1$.
$\Rightarrow f(\bar{x}) = f(A\bar{x}) = f(|\bar{x}|\hat{e}_1) =: \varphi(|\bar{x}|)$.

7. Laplacen muunnos

7.1. Kaksipuolinen Laplacen muunnos ja Fourier'n muunnoksen analyyttinen jatko

Edellä nähtiin, että esim. eksponentiaalisesti kasvavista funktioista ei voi ottaa Fourier'n muunnosta:

Esim. 6.2:ssa nähtiin, että jos $f(x) = e^{-a|x|}$, $a > 0$, on $\hat{f}(p) = \frac{2a}{p^2+a^2}$. Tehdään tässä formaali "analyyttinen jatko" ja sijoitetaan $a = -\alpha$, $\alpha > 0$. Saadaan $f(x) = e^{\alpha|x|}$:n "Fourier'n muunnos" $\hat{f}(p) = -\frac{2\alpha}{p^2+\alpha^2}$. Mutta tämän käänteismuunnoshan on $-e^{-\alpha|\bar{x}|}$ ei $e^{\alpha|\bar{x}|}$, joten tästä "jatkeesta" tuskin on hyötyä alkuperäisen funktion tutkimisessa.

Näin suoraan F-muunnosta ei siis voi yleistää.

* Yleistys onnistuu kuitenkin kohtuullisen helposti, jos f on eksponentiaalisesti kasvava vain esim. kun $x \to +\infty$ ja se vähenee tarpeeksi nopeasti, kun $x \to -\infty$:

Oletetaan, että f on funktio, jolle löytyy sellaiset $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, että

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\sigma x} |f(x)| \, dx < \infty \quad \text{ja}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\sigma x} |f(x)|^2 \, dx < \infty, \text{ aina kun } a < \sigma < b.$$

(Tämä pätee esim. funktiolle $f(x) = \begin{cases} e^{ax}, & x \geq 0 \\ e^{-b|x|}, & x < 0. \end{cases}$)

Tällöin funktio $f_\sigma(x) := e^{-\sigma x} f(x) \in L^2(\mathbb{R}) \Rightarrow$ sen Fourier'n muunnos on kääntyvä ja tiedetään, että

$$\hat{f}_\sigma(p) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ipx} e^{-\sigma x} f(x)\,dx$$

on jatkuva funktio, joka häviää äärettömyydessä (Riemannin-Lebesguen lemma).

Itse asiassa yo. oletukset takaavat paljon enemmän: f:n Fourier'n muunnos

$$\hat{f}(z) := \int_{-\infty}^{\infty} e^{-izx} f(x)\,dx$$

on <u>analyyttinen</u> alueessa $a < -\operatorname{Im} z < b$.

Syy: Sivun 64 dominointiehto toteutuu, ja funktio $z \mapsto e^{-izx} f(x)$ on kokonainen kaikilla $x \in \mathbb{R}$.

Lisä) Miten dominanttifunktio löydetään?

Oletetaan, että $\varepsilon > 0$ ja $z = \alpha - i\sigma$, jossa $\alpha \in \mathbb{R}$ ja $a + \varepsilon < \sigma < b - \varepsilon$. Tällöin

$$|e^{-izx} f(x)| = |e^{-i\alpha x} e^{-\sigma x} f(x)| = e^{-\sigma x} |f(x)| \le g(x),$$

jossa $g(x) := \begin{cases} e^{-(a+\varepsilon)x} |f(x)|, & x \ge 0, \\ e^{-(b-\varepsilon)x} |f(x)|, & x < 0. \end{cases}$

Lisäksi $\int_{-\infty}^{\infty} |g(x)|\,dx = \int_{-\infty}^{0} e^{-(b-\varepsilon)x} |f(x)|\,dx$

$+ \int_0^{\infty} e^{-(a+\varepsilon)x} |f(x)|$

$$\le \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\underbrace{(b-\varepsilon)}_{\in (a,b)}x} |f(x)|\,dx + \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\underbrace{(a+\varepsilon)}_{\in (a,b)}x} |f(x)|\,dx < \infty$$

Tämä todistaa analyyttisyyden alueissa $a + \varepsilon < \sigma = -\operatorname{Im} z < b - \varepsilon$ kaikilla $\varepsilon > 0 \Rightarrow$ pätee myös alueessa $a < -\operatorname{Im} z < b$.

Erityisesti siis : $\hat{f}_\sigma(p) = \hat{f}(p - i\sigma)$,

joten käänteiskaava saa muodon

$$f_\sigma(x) = e^{-\sigma x} f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ipx} \hat{f}_\sigma(p) \frac{dp}{2\pi}$$

$\Rightarrow$ aina, kun $a < \sigma < b$, pätee

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ipx + \sigma x} \hat{f}(p - i\sigma) \frac{dp}{2\pi} .$$

Tämä kaava sievenee, kun huomataan, että se on sama kuin integraalin

$$\int_\gamma e^{zx} \hat{f}(-iz) \frac{dz}{2\pi i}$$ arvo, kun γ

on polku $\gamma(p) = \sigma + ip$, $p \in (-\infty, \infty)$.
($\Rightarrow -i\gamma(p) = p - i\sigma$ ja $\gamma'(p) = i$).

* Funktiota $F(s) := \hat{f}(-is)$ kutsutaan <u>kaksipuoliseksi Laplacen muunnokseksi</u>

ja siitä käytetään joskus merkintää $\mathcal{B}[f]$
("$\mathcal{B}$", kuten "bilateral Laplace transform").

Ollaan johdettu siis seuraava käänteismuunnostulos:

Olkoon f funktio ja löytyy a ja b, $a < b$, joille

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\sigma x} |f(x)| \, dx < \infty \quad \text{aina kun } a < \sigma < b$$

Tällöin funktio $F(s) := \int_{-\infty}^{\infty} e^{-sx} f(x) \, dx$

on analyyttinen alueessa $a < \operatorname{Re} s < b$.

Jos lisäksi $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\sigma x} |f(x)|^2 dx < \infty$, aina kun $a < \sigma < b$, pätee

$$f(x) = \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} e^{sx} F(s) \frac{ds}{2\pi i}, \quad \text{aina kun } a < \sigma < b.$$

* Huomautuksia:

- Kaava toimii myös, jos $a = -\infty$ tai $b = \infty$. Erityisesti, jos f on jatkuva funktio, joka on nolla jonkin äärellisen välin ulkopuolella, pätevät molemmat oletukset kaikilla $\sigma \in (-\infty, \infty)$.

- Jos $z = \alpha + i\beta$ ja $z = -is$, on $s = iz = -\beta + i\alpha$. Näin ollen $-\operatorname{Im} z = -\beta = \operatorname{Re} s$, josta saadaan analyyttisyysalueeksi juuri $a < \operatorname{Re} s < b$.

- L^2-integroituvuutta tarvittiin pelkästään käänteismuunnoksen ottamiseen, analyyttisyyteen riitti pelkkä ensimmäinen integraaliehto.

- Käänteismuunnoksella on samat rajoitukset kuin L^2-Fourierin tapauksessa. Esim. jos f ei ole jatkuva, pätee tulos vain "melkein kaikkialla".

- Käänteismuunnoksen integraali on lyhennysmerkintä suoran polun γ yli otetulle integraalille. Huomaa kuitenkin, että analyyttisyyttä ja Cauchyn lausetta soveltamalla nähdään, että sama tulos saadaan mitä tahansa polkua pitkin, joka kulkee $\sigma - iR \to \sigma + iR$ analyyttisyysalueen sisällä, kunhan lopuksi otetaan vielä $R \to \infty$.

7.2. Laplacen muunnos

Funktion $f(t)$, $t \geq 0$, Laplacen muunnos $\mathcal{L}[f]$, määritellään integraalina

$$\mathcal{L}[f](s) := \int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt,$$

niille $s \in \mathbb{C}$, joilla integraali suppenee. Soveltamalla edellisen kohdan tulosta funktioon

$$g(x) := \begin{cases} f(x), & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

huomataan, että $\mathcal{L}[f](s) = \mathcal{B}[g](s)$, ja päädytään seuraavaan käänteismuunnostulokseen:

Olkoon f funktio ja löytyy vakio a, jolla

$$\int_0^\infty e^{-at} |f(t)|\,dt < \infty.$$

Tällöin $\mathcal{L}[f](s)$ on analyyttinen alueessa $\mathrm{Re}\, s > a$. Jos lisäksi myös

$$\int_0^\infty e^{-2at} |f(t)|^2\,dt < \infty,$$

pätee myös käänteismuunnoskaava:

$$\int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} e^{ts} \mathcal{L}[f](s) \frac{ds}{2\pi i} = \begin{cases} f(t), & \text{kun } t \geq 0, \\ 0, & \text{kun } t < 0, \end{cases}$$

aina kun $\sigma > a$.

* Ei ole vahinko, että tässä integrointimuuttujan nimi on vaihdettu x:stä t:ksi: Laplacen muunnos otetaan usein juuri ajan suhteen. Fourierin muunnos vaatisi $f(t) \to 0$, kun $t \to \infty$, jota on yleensä vaikea järjestää. Laplacen muunnoksella riittää $|f(t)| \leq C e^{\beta t}$, jolloin voidaan valita mikä tahansa $a > \beta$.

* Laplacen muunnosta sovelletaan usein seuraavalla tavalla:

- Etsitään vakio "a", jolle integraaliehdot toteutuvat. (Esim. $|f(t)| \le C e^{\beta t}$, $\beta < a$, riittää.)

- Lasketaan $F(s) = \mathcal{L}[f](s)$, kun $s > a$. Koska $s \in \mathbb{R}$, voi tässä usein käyttää muuttujanvaihtoja.

- Etsitään $F(s)$:n analyyttinen jatko mahdollisimman suureen alueeseen Ω. Tiedetään, että Ω sisältää kaikki $s \in \mathbb{C}$, joille $\operatorname{Re} s > a$. Usein Ω on kuitenkin paljon suurempi, esim. voi olla, että $F(s)$:llä on vain äärellisen monta napaa.

- Lähdetään liikkeelle käänteismuunnoskaavasta kun $\sigma > a$ käyttäen polkua $\gamma(p) = \sigma - ip$. Polkua γ voi tämän jälkeen muokata koko alueessa Ω Cauchyn lausetta käyttäen.

  Jos F:llä on pelkkiä eristettyjä erikoispisteitä (esim. napoja), ratkeaa integraalin arvo residylausetta soveltamalla.

Lisä)

* Verrattuna 2-puoleiseen Laplace-muunnokseen, yllä on "unohdettu" ehdoista σ ja tarkasteltu suoraan integraaleja, kun $\sigma = a$. Tämä toimii, sillä ehdoista seuraa, että aina kun $\sigma > a$, pätee:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\sigma x}|g(x)|dx = \int_0^{\infty} \overbrace{e^{-\sigma x}}^{\le -ax,\ \text{koska } -x \le 0}|f(x)|dx \le \int_0^{\infty} e^{-ax}|f(x)|dx < \infty,$$

ja samoin $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\sigma x}|g(x)|^2dx \le \int_0^{\infty} e^{-2ax}|f(x)|^2dx < \infty.$

Näin ollen käänteiskaavaa voi soveltaa valitsemalla $b = a$.