Fourier'n muunnoksen perusominaisuuksia

Riemannin-Lebesguen lemma: (Lause 6.2.)

Oletetaan, että f on itseisesti integroituva; eli $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\,dx < \infty$. Tällöin sen Fourier'n muunnokselle $\hat{f}(p)$ pätee:

a) $\hat{f}$ on jatkuva funktio

b) $|\hat{f}(p)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\,dx \quad \forall p \in \mathbb{R}$

c) $\lim_{p \to \infty} \hat{f}(p) = 0 = \lim_{p \to -\infty} \hat{f}(p)$.

(Todistus sivuutetaan, löytyy esim. kirjasta W. Rudin: Functional analysis, theorem 7.5., tai Wikipediasta. a) ja b) ovat "helppoja", c) vaatii vähän enemmän työtä.)

* Kohdan "c)" voi ilmaista sanomalla, että $\hat{f}(p) = \mathcal{O}(|p|^0)$, kun $|p| \to \infty$, tai että "$\hat{f}$ häviää äärettömyydessä".
* Jos f on derivoituva, voidaan $\hat{f}$:n häviämisen nopeutta arvioida tarkemminkin:

Lause 6.3: Oletetaan, että f on n kertaa derivoituva funktio, jonka kaikki derivaatat $f^{(k)}$, $k = 0, 1, \ldots, n$, ovat itseisesti integroituvia ja ne häviävät äärettömyydessä.

Tällöin $\hat{f}(p) = \mathcal{O}(|p|^{-n})$, kun $|p| \to \infty$.

Todistus: Osittaisintegroimalla nähdään, kun $p \neq 0$,

$$\hat{f}(p) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ipx} f(x)\, dx$$

$$= \underbrace{\Big/_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{-ip} e^{-ipx} \cdot f(x)}_{} - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{-ip} e^{-ipx} f'(x)\, dx$$

($= 0$, sillä $f = f^{(0)}$:n oletettiin häviävän äärettömyydessä)

$$= \frac{1}{ip} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ipx} f'(x)\, dx}_{= o(1),\ \text{Riemannin-Lebesguen lemman mukaan}} \qquad (*)$$

$\Rightarrow \quad \hat{f}(p) = o(|p|^{-1})$, kun $|p| \to \infty$.

$\left(\Leftrightarrow \quad \lim_{p \to \pm\infty} \left[|p| \hat{f}(p) \right] = 0. \right)$

Oletuksien mukaan osittaisintegrointia voi jatkaa samalla tavalla n kertaa

$$\Rightarrow \quad \hat{f}(p) = \frac{1}{(ip)^n} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ipx} f^{(n)}(x)\, dx = o(|p|^{-n}) \quad \square$$

* Yo. todistuksen kaavasta $(*)$ saadaan myös seuraava tulos:

<u>Lause 6.4.</u> (Derivaatan Fourier'n muunnos)

$$\widehat{f'}(p) = ip \hat{f}(p), \text{ aina kun, jos } f \text{ ja } f'$$

ovat itseisesti integroituvia ja $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 0$.

Lisä)

* Erityisesti, jos f on Schwartzin funktio, pätee siis kaikilla $n \in \mathbb{N}$:

a) $\hat{f}(p) = o(|p|^{-n})$ ja b) $\mathcal{F}[f^{(n)}](p) = (ip)^n \hat{f}(p)$.

Konvoluutio ja sen Fourier'n muunnos

Funktioiden f ja g konvoluutio on funktio h, joka määritellään kaavalla

$$h(x) := \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)\,g(y)\,dy .$$

Siitä käytetään merkintää $h = f * g$.

* Muuttujanvaihdolla $y' = x-y$ huomaa, että konvoluutio symmetrinen, eli
$g * f = f * g$.

* Konvoluutio tulee sovelluksissa vastaan esim. kuvankäsittelyssä ja digitaalisessa signaalinkäsittelyssä. Näissä käytetään hyväksi yhtä konvoluution perusominaisuutta: Tyypillisesti $f*g$ on sileämpi kuin "signaali" g. (Lisätietoja löytyy englanninkielisiltä Wikipediasivuilta.)

Mat) Konvoluution määritelmässä riittää, että $f, g \in L^1(\mathbb{R})$. Tällöin integraali suppenee melkein kaikilla x ja $h \in L^1(\mathbb{R})$.
(Ks. Rudin, RCA, Theorem 8.14.)

* Konvoluution F-muunnos on helppo laskea integrointijärjestystä vaihtamalla:

$$\hat{h}(p) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ipx}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)\,g(y)\,dy\right] dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ipx} f(x-y)\,g(y)\,dx\right] dy$$

$$\overset{x'=x-y}{=} \int_{-\infty}^{\infty} g(y)\left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ip(x'+y)} f(x')\,dx'\right] dy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} g(y)\, e^{-ipy}\, \hat{f}(p)\, dy = \hat{f}(p)\,\hat{g}(p).$$

Saatiin siis seuraava tulos:

Lause 6.5.: $\widehat{(f * g)}(p) = \hat{f}(p)\,\hat{g}(p)$

eli Fourier'n muunnos muuttaa konvoluution tavalliseksi tuloksi.

* Tulos pätee aina kun $f, g \in L^1(\mathbb{R})$, eli $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\,dx,\ \int_{-\infty}^{\infty} |g(x)|\,dx < \infty$.

(MAT) Tällöin yo. laskussa voi perustella integrointijärjestyksen vaihdon Fubinin lauseella.)

Plancherelin ja Parsevalin kaavat Fourier'n muunnokselle

Kun $f, g \in L^2(\mathbb{R})$, pätee aina

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)^* g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(p)^* \hat{g}(p) \frac{dp}{2\pi} \quad \text{(Plancherel)}$$

ja

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(p)|^2 \frac{dp}{2\pi}. \quad \text{(Parseval)}$$

* Plancherelin kaava sanoo siis, että Fourier'n muunnos säilyttää sisätulon, kerrointa 2π vaille: $\langle f | g \rangle = \frac{1}{2\pi} \langle \hat{f} | \hat{g} \rangle$.

LISÄ)

* Jos olisi käytetty s. 124 mainittuja vaihtoehtoisia määritelmiä "1)" tai "2)", poistuu kerroin 2π, eli $\langle f | g \rangle = \langle \mathcal{F}f | \mathcal{F}g \rangle$. Tällaista sisätulon säilyttävää kääntyvää kuvausta $\mathcal{F}$ kutsutaan unitaariseksi. Näillä on tärkeä merkitys kvanttimekaniikassa.

Lisä) Kaavojen johto, kun $f, g \in S$.

$$\Rightarrow g(x) = \mathcal{F}^{-1}[\hat{g}](x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ipx} \hat{g}(p) \frac{dp}{2\pi} \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} f(x)^* g(x)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(x)^* e^{ipx} \hat{g}(p) \frac{dp}{2\pi} \right] dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \hat{g}(p) \underbrace{\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(x)^* e^{ipx}\, dx \right]}_{= \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ipx} dx \right]^* = \hat{f}(p)^*} \frac{dp}{2\pi}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(p)^* \hat{g}(p) \frac{dp}{2\pi},$$ eli Plancherel pätee.

MAT) Koska mitä tahansa funktiota $f \in L^2$ voidaan approksimoida mielivaltaisen tarkasti L^2-normissa funktioilla $f_n \in S$, siten että myös $\hat{f}_n \to \hat{f}$ L^2-normissa, seuraa tästä, että kaava pätee myös kun $f, g \in L^2$.

Plancherelin kaavasta seuraa Parsevalin kaava sijoittamalla $g = f$. $\square$

Esim. 6.3. Lasketaan $\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin(pa)}{p}\right)^2 dp$, $a > 0$, käyttäen Parsevalin kaavaa:

Esim. 6.1. a):ssa nähtiin, että parillisen suorakulmaisen pulssin $h(x) = \mathbb{1}(|x| \le a)$ Fourier'n muunnos on $\hat{h}(p) = 2\frac{\sin(pa)}{p}$ (tämän saa laskettua helposti suoraankin). Parsevalin kaavan mukaisesti siis

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin(pa)}{p}\right)^2 dp = \frac{1}{4}\int_{-\infty}^{\infty} |\hat{h}(p)|^2 dp = \frac{2\pi}{4}\int_{-\infty}^{\infty} |h(x)|^2 dx$$

$$= \frac{\pi}{2}\int_{-a}^{a} 1^2\, dx = \frac{\pi}{2} \cdot 2a = \pi a.$$

6.2. Moniulotteinen Fourier'n muunnos

Aloitetaan 2-ulotteisesta tapauksesta: $f(x,y)$, jossa $x,y \in \mathbb{R}$. Tehdään ensin Fourier'n muunnos x:n suhteen ja tämän jälkeen y:n suhteen: Saadaan

$$\hat{f}(p,q) := \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iqy} \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ipx} f(x,y)\, dx \right] dy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} dx\, dy\; e^{-i(px+qy)} f(x,y)$$

aina kun $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} dx\, dy\, |f(x,y)| < \infty$.

Ottamalla tästä käänteismuunnos ensin q:n suhteen ja sen jälkeen p:n suhteen, saadaan (ainakin, jos f on Schwartzin funktio)

$$f(x,y) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ipx} \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{iqy} \hat{f}(p,q) \frac{dq}{2\pi} \right] \frac{dp}{2\pi}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp}{2\pi}\frac{dq}{2\pi}\, e^{i(px+qy)} \hat{f}(p,q)$$

* Huomataan, että merkinnät käyvät kömpelöiksi, varsinkin kun ulottuvuuksien määrää tästä lisätään. Otetaan käyttöön seuraavat (yleisesti käytetyt) notaatiot:

1) $\int_{\mathbb{R}^n} d^n\bar{x}\, F(\bar{x})$ (vektori $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$)

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} dx_1\, dx_2 \cdots dx_n\, F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

2) Huomataan, että pistetulon avulla

$$px + qy = (p,q)\cdot(x,y)$$

Saadaan määriteltyä n-ulotteinen Fourier'n muunnos

$$\mathcal{F}[f](\bar{p}) := \int_{\mathbb{R}^n} d^n\bar{x}\; e^{-i\bar{p}\cdot\bar{x}} f(\bar{x}) \;,\quad \bar{p}\in\mathbb{R}^n$$

ja sen käänteismuunnos

$$\mathcal{F}^{-1}[g](\bar{x}) := \int_{\mathbb{R}^n} \frac{d^n\bar{p}}{(2\pi)^n}\, e^{i\bar{p}\cdot\bar{x}} g(\bar{p}) \;,\quad \bar{x}\in\mathbb{R}^n.$$

Esim. 6.4. Laske funktion $f(\bar{r}) = e^{-a|\bar{r}|}$, $\bar{r}\in\mathbb{R}^3$, $a>0$, Fourier'n muunnos.

Määr. mukaan $\hat{f}(\bar{p}) = \int_{\mathbb{R}^3} d^3\bar{r}\, e^{-i\bar{p}\cdot\bar{r}} e^{-a|\bar{r}|}$.

Lasketaan integraali käyttäen pallokoordinaatistoa, jonka z-akseli osoittaa vektorin $\bar{p}$ suuntaan. Tällöin $\bar{p}\cdot\bar{r} = p\,\hat{e}_z\cdot\bar{r} = pr\cos\theta$, $p=|\bar{p}|$, $r=|\bar{r}|$, joten saadaan

$$\hat{f}(\bar{p}) = \int_0^\infty dr\, r^2 \int_0^\pi d\theta \sin\theta \underbrace{\int_0^{2\pi} d\varphi}_{\to 2\pi}\, e^{-ipr\cos\theta - ar}$$

$\alpha = \cos\theta$

$$\stackrel{\downarrow}{=} 2\pi \int_0^\infty dr\, r^2 \int_{-1}^{1} d\alpha\, e^{-ipr\alpha} e^{-ar}$$

$$= 2\pi \int_0^\infty dr\, \cancel{r^2} e^{-ar} \Big/_{-1}^{1} \frac{1}{-ip\cancel{r}} e^{-ipr\alpha}$$

$$= \frac{2\pi}{p}\int_0^\infty dr\, r e^{-ar}\, i\,(e^{-ipr} - e^{ipr})$$

$$= \frac{2\pi i}{p}\left[\int_0^\infty dr\, r e^{-r(a+ip)} - \int_0^\infty dr\, r e^{-r(a-ip)}\right]$$

Osittaisintegroimalla, kun $b\in\mathbb{R}$,

$$\int_0^\infty dr\, r e^{-r(a+ib)} = \Big/_0^\infty r\frac{1}{-(a+ib)} e^{-r(a+ib)} - \int_0^\infty dr\, 1\, \frac{1}{-(a+ib)} e^{-r(a+ib)}$$

$$= 0 - 0 + \frac{1}{a+ib} \Big/_0^\infty \frac{1}{-(a+ib)} e^{-r(a+ib)} = \frac{1}{(a+ib)^2}$$

$$\Rightarrow \hat{f}(\bar{p}) = \frac{2\pi i}{p}\left[\frac{1}{(a+ip)^2} - \frac{1}{(a-ip)^2}\right]$$

$$= \frac{2\pi i}{p}\,\frac{(a-ip)^2-(a+ip)^2}{(a+ip)^2((a+ip)^*)^2} = \frac{2\pi i}{p}\,\frac{\cancel{a^2}-\cancel{p^2}-2iap-(\cancel{a^2}-\cancel{p^2}+2iap)}{(\underbrace{|a+ip|^2}_{=a^2+p^2})^2}$$

$$= \frac{2\pi i}{\cancel{p}}\,\frac{-4ia\cancel{p}}{(a^2+p^2)^2} = \frac{8\pi a}{(a^2+p^2)^2}\,, \quad p = |\bar{p}|. \quad \Box$$