numerointi
jatkuu I:aista → 63

Fymm Ib

Uusia konventioita:

Perusmateriaalin lisäksi käydään läpi tässä kahdenlaista täydentävää materiaalia:

"LISÄ)" Tarkoittaa tuloksia, joihin saattaa törmätä myöhemmin joillain fysiikan kursseilla, mutta niitä ei tarvita yleisesti. Näistä kohdista riittää yleensä pelkkä tuloksen selailu, jotta tietää tarvittaessa jatkossa mistä yksityiskohtia voi lähteä etsimään. Näitä tuloksia ei tarvitse muistaa tai osata suoraan soveltaa tentissä.

"MAT)" Matemaattisia yksityiskohtia, joissa tarkennetaan tulosta ja kerrotaan esim. viitteitä mistä todistuksia voi lähteä etsimään. Nämä kohdat voi huoletta hypätä yli, ilman että kurssin suorittaminen siitä kärsii.

4. Eulerin funktiot

4.1. Integraalin derivointi parametrin suhteen.

(Korvaa kirjan luvun 4.1.)

Määritellään kompleksifunktio $F(z)$ integroimalla "parametrin" t yli:

$$F(z) := \int f(t,z)\,dt \quad , \quad \text{kun } z \in \Omega$$

Jos a) $f(t,z)$ on analyyttinen funktio z:ssa kaikilla t,

b) löytyy dominoiva funktio $M(t)$, jolle

$$|f(t,z)| \le M(t) \, .$$

c) $\int M(t)\,dt < \infty$,

on myös F analyyttinen.

[* Eli analyyttisyys säilyy parametrin yli integroitaessa, jos löytyy integroituva majorantti M.]

* Tällöin voi lisäksi derivoinnin siirtää integraalin sisään:

$$\frac{d}{dz} F(z) = \int \frac{\partial f(t,z)}{\partial z}\,dt \, .$$

Todistus:

MAT) 1) Dominoidun konvergenssin lausetta soveltaen saadaan $\lim_{z \to z_0} F(z) = \int \left(\lim_{z \to z_0} f(t, z) \right) dt$

$\overset{f \text{ jatkuva}}{=} \int f(t, z_0)\, dt = F(z_0)$, joten F on jatkuva.

2) Lisäksi b) & c) takaavat sen, että integrointijärjestystä voi vaihtaa (Fubinin lause), kun $\gamma(\Delta)$ on mikä tahansa Moreran lauseessa mainittu polku. (ks. Fa) Näin ollen

$$\int_{\gamma(\Delta)} F(z)\, dz = \int \Big(\underbrace{\int_{\gamma(\Delta)} f(t,z)\, dz}_{=0,\ \text{koska } z \mapsto f(t,z) \text{ analyyttinen.}} \Big) dt = 0.$$

$\Rightarrow$ F analyyttinen (Moreran lauseen perusteella)

3) Fubinin lausetta voi tällöin myös soveltaa Cauchyn integraalikaavaan derivaatalle:

$$F'(z) = \oint_\gamma \frac{F(\zeta)}{(\zeta - z)^2} \frac{d\zeta}{2\pi i} = \int \left(\oint_\gamma \frac{f(t,\zeta)}{(\zeta - z)^2} \frac{d\zeta}{2\pi i} \right) dt$$

$$= \int \frac{\partial}{\partial z} f(t,z)\, dt.$$

---

* Sovellus: Besselin funktiot, määritellään

$$J_n(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(n\varphi - z \sin\varphi)\, d\varphi, \quad z \in \mathbb{C},$$

ovat kokonaisia. Nimittäin, jos $R > 0$ ja $z \in B_R(0)$, pätee siis $|z| < R$ ja kun $z = x + iy$

$$|\cos(n\varphi - z\sin\varphi)| = \frac{1}{2} \left| e^{n\varphi - (x+iy)\sin\varphi} + e^{-n\varphi + (x+iy)\sin\varphi} \right|$$

$$\leq \frac{1}{2} \left(e^{n\varphi - x\sin\varphi} + e^{-n\varphi + x \sin\varphi} \right) \leq e^{|n\varphi - x\sin\varphi|} \leq e^{|n|\pi + |x|}$$

$$\leq e^{|n|\pi + R}, \quad \text{sillä } |x| = |\operatorname{Re} z| \leq |z| < R.$$

Voidaan siis valita $M(\varphi) = e^{\ln|\pi + R}$, joka vakiona antaa äärellisen integraalin, $\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} M(\varphi)\,d\varphi < \infty$.

$\therefore$ J_n on analyyttinen kaikilla z, joille $|z| < R$.

Ja koska R mielivaltainen, seuraa analyyttinen kaikkialla.

4.2. Analyyttinen jatkaminen

Esim. $f_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^n$, kun $|z| < 2$.

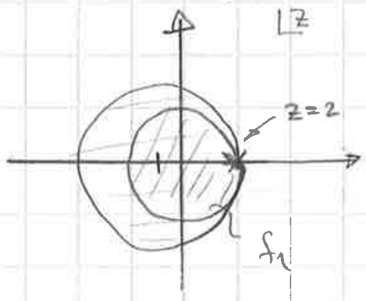
Geometrinen sarja $\Rightarrow$ $f_1(z) = \dfrac{1}{1 - \frac{z}{2}}$, kun $|z| < 2$

Sisältää pisteen $z = -1$, ja pätee

$$\frac{1}{1-\frac{z}{2}} = \frac{2}{2-z} = \frac{2}{3-w}\bigg|_{w=z+1} = \frac{2}{3}\,\frac{1}{1-\frac{w}{3}}\bigg|_{w=z+1}$$

$$= \frac{2}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{w}{3}\right)^n, \quad \text{kun } |w| < 3, \quad w = z+1$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{3^{n+1}}(z+1)^n, \quad \text{kun } |z+1| < 3$$



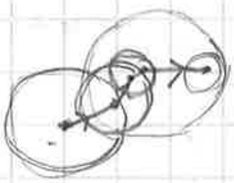
* Tällöin $f_2(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{3^{n+1}}(z+1)^n$

on f_1:n analyyttinen jatke.

* Laajin f_1:n analyyttinen jatke

on $f(z) = \dfrac{2}{2-z}$, $z \neq 2$.

* Yleisesti jatketta voidaan lähteä rakentamaan jotain polkua pitkin:

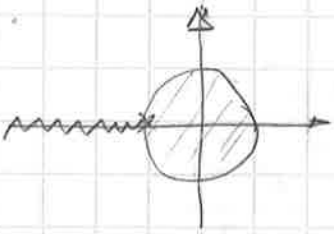


* Potenssisarja epäkäytännöllinen, muita vaihtoehtoja myöhemmin.

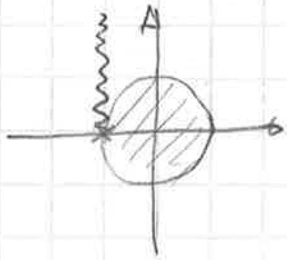
* Jatketta ei välttämättä löydy kaikkialle kompleksitasoon (esim. $z=2$ yllä), ja se voi riippua siitä miten polut valitaan:

Esim. $\ln(1+z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} z^n}{n}$, $|z|<1$:lle

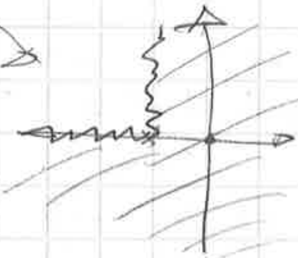
Saadaan kaksi eri jatketta valitsemalla polut eri alueista:



ja



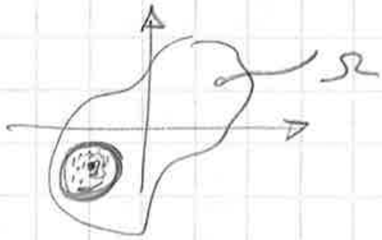
* Tällöin jatkeet ovat samat niiden yhteisessä määrittelyalueessa.



Syy: ne yhtyvät alkuperäisessä kiekossa (ks. Ia, s. 56 alalaita)

$\Downarrow$

* Kertausta: Jos f, g yhtyvät äärettömän monessa pisteessä, jotka sisältyvät analyyttisyysalueeseen kuuluvaan suljettuun kiekkoon, niin $f=g$ koko alueessa.



* Esim. jos $f=g$ reaaliakselilla, niin ne ovat samat koko reaaliakselin sisältävässä analyyttisyysalueessa.

Esim. $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$.

Koska sarjan suppenemissäde $= \infty$, ja e^z kokonainen, on siis välttämättä

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \text{ kaikilla } z \in \mathbb{C}.$$

4.3. Eulerin Γ-funktio

Muistutus: kun $z \in \mathbb{C}$, $t > 0$, määritellään

$t^z := e^{z \ln t}$. Tässä $\ln t \in \mathbb{R}$, joten

$$|t^z| = |e^{(x+iy)\ln t}| = |e^{x \ln t} \cdot e^{iy \ln t}| = e^{x \ln t} = t^{\operatorname{Re} z}.$$

Näin ollen integraali

$$\Gamma(z) := \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1}\,dt \qquad \text{(2. lajin Eulerin integraali)}$$

suppenee, kun $\operatorname{Re} z > 0$. Nimittäin tällöin

$$\int_0^1 |e^{-t} t^{z-1}|\,dt \le \int_0^1 t^{\operatorname{Re} z - 1}\,dt = \frac{1}{\operatorname{Re} z} \Big/_0^1 t^{\operatorname{Re} z} < \infty.$$

ja $$\int_1^\infty |e^{-t} t^{z-1}|\,dt = \int_1^\infty e^{-t} t^{\operatorname{Re} z - 1}\,dt < \infty.$$

(Syy: $e^{-t} t^p = e^{-t + p \ln t} = e^{-t(1 - p\underbrace{\frac{\ln t}{t}}_{\to 0 \text{ kun } t \to \infty})}$

joten jostain t_0 alkaen pätee esim. $e^{-t} t^p \le e^{-\frac{1}{2}t}$, joka on integroituva.)

* Itse asiassa, kun $R > 0$ ja $\operatorname{Re} z < R$, pätee kaikille $t \ge 1$ myös $|e^{-t} t^{z-1}| \le e^{-t} t^{R-1}$, joka yo. mukaan on integroituva. Näin ollen integraali

$$\int_1^\infty e^{-t} t^{z-1}\,dt \quad \text{määrittelee kokonaisen funktion.}$$

* Samanlaisella päättelyllä nähdään, että

$$\int_0^1 e^{-t} t^{z-1}\,dt \quad \text{on analyyttinen, kun } \operatorname{Re} z > 0.$$

Entä kun $\operatorname{Re} z \le 0$?

* Ratkaisu: Kun $\operatorname{Re} z > 0$, kehitetään e^{-t} sarjaksi ja integroidaan termeittäin:

$$e^{-t} t^{z-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (-1)^n \underbrace{t^n t^{z-1}}_{= e^{n \ln t} e^{(z-1)\ln t} = e^{(n+z-1)\ln t} = t^{n+z-1}}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (-1)^n t^{n+z-1}$$

$$\Rightarrow \int_0^1 dt\, e^{-t} t^{z-1} \overset{(1)}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (-1)^n \underbrace{\int_0^1 dt\, t^{n+z-1}}_{= \Big/_0^1 \frac{t^{n+z}}{n+z}}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (-1)^n \frac{1}{n+z}, \quad \text{kun } \operatorname{Re} z > 0;$$

sillä tällöin $\operatorname{Re}(n+z) > 0$ kaikilla $n = 0, 1, \ldots$, joten $t^{n+z} \to 0$ kun $t \to 0$.

Näin ollen funktio $f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{(-1)^n}{n+z}$

on integraalin määrittelemän funktion analyyttinen jatko arvoille $z \neq 0, -1, -2, \ldots$ ← (2)

MAT) (1) Integrointi voidaan tehdä termeittäin, sillä prujujen s. 50 1b)-ehto toteutuu:

$$\left| \frac{1}{n!} (-1)^n t^{n+z-1} \right| \leq \frac{1}{n!} t^{n+\operatorname{Re} z - 1} \leq \frac{1}{n!} t^{\operatorname{Re} z - 1}$$

$$\text{ja } \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 dt\, \frac{1}{n!} t^{\operatorname{Re} z - 1} = \frac{1}{\operatorname{Re} z} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} < \infty.$$

(2) Jos $z \notin -\mathbb{N}_0$, on $\varepsilon := \min_{n \in \mathbb{N}} |n+z| > 0$. Tällöin, kun $w \in U := B(z, \frac{\varepsilon}{2})$ on $\left| \frac{1}{n!} \frac{(-1)^n}{n+w} \right| \leq \frac{1}{n!} \frac{1}{\varepsilon/2}$

sillä $|n+w| \geq |n+z| - |w-z| \geq \varepsilon - \frac{\varepsilon}{2} = \frac{\varepsilon}{2}$. Koska $w \mapsto \frac{1}{n!} \frac{(-1)^n}{n+w}$ on analyyttinen U:ssa, ja $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{2}{\varepsilon} < \infty$, on f analyyttinen U:ssa, Moreran lausetta soveltaen (ks. s. 64)

* Tämän jälkeen voi lukea kirjan sivut 88 – 92, alkaen kaavasta "(4.11)". Alla joitain selvennyksiä yksityiskohtiin:

- Kaavan (4.13) johto: Osittaisintegrointi toimii analyyttisillä funktioilla aivan kuten reaalifunktioillakin. Prujun s. 29 tuloksen mukaan, kun $F = fg$,

$$F(\beta) - F(\alpha) = \int_{\gamma_{\alpha \to \beta}} F'(z)\, dz, \quad \text{jossa } \gamma_{\alpha\to\beta} \text{ on}$$

mikä tahansa polku $\alpha \to \beta$. Tässä $F' = f'g + fg'$, joten saadaan tulos

$$\int_{\gamma_{\alpha\to\beta}} f'(z)\, g(z)\, dz = \Big/_{\alpha}^{\beta} f(z)\, g(z) - \int_{\gamma_{\alpha\to\beta}} f(z)\, g'(z)\, dz.$$

Reaaliakselilla kulkevalle polulle $\gamma(t) = t$, $t \in [\alpha, \beta]$, saadaan siis tuttu tulos

$$\int_{\alpha}^{\beta} f'(t)\, g(t)\, dt = \Big/_{\alpha}^{\beta} f(t)\, g(t) - \int_{\alpha}^{\beta} f(t)\, g'(t)\, dt$$

Kaavan (4.13) johdossa on valittu $f(t) = -e^{-t}$ ja $g(t) = t^z$, joille pätee $f'(t) = e^{-t}$ ja

$$g'(t) = \frac{d}{dt} e^{z \ln t} = z \cdot \frac{d}{dt} \ln t \cdot e^{z \ln t} = z \cdot t^{-1} \cdot t^{z} = z\, t^{z-1}.$$

- s. 89 "napakoordinaatti"-integraaleissa:

a) $2\int_0^{\infty} dr\, r\, e^{-r^2} = \int_0^{\infty} dt\, e^{-t} = 1.$ $(t = r^2)$

b) Kun $x = \cot^2\phi = \dfrac{\cos^2\phi}{\sin^2\phi}$, on $\dfrac{dx}{d\phi} = -2\cot\phi \cdot (1 + \cot^2\phi)$,

jossa $\cot\phi > 0$, kun $\phi \in (0, \frac{\pi}{2})$. Näin ollen x on aidosti vähenevä ϕ:n funktio, joten muuttujanvaihto on sallittu, ja siinä väli $(0, \frac{\pi}{2})$ kuvautuu väliksi $(0, \infty)$. Lisäksi $\dfrac{d\phi}{dx} = \dfrac{1}{-2x^{\frac{1}{2}}(1+x)}$.

– "Esimerkki 3.13":n residylasku:

Tutkittava integraalia

$$I(z) := \int_0^\infty \frac{x^{z-1}}{1+x}\,dx \quad, \text{ jossa } 0<z<1.$$

Kirjoitetaan $x^{z-1} = e^{(z-1)\ln x}$, ja

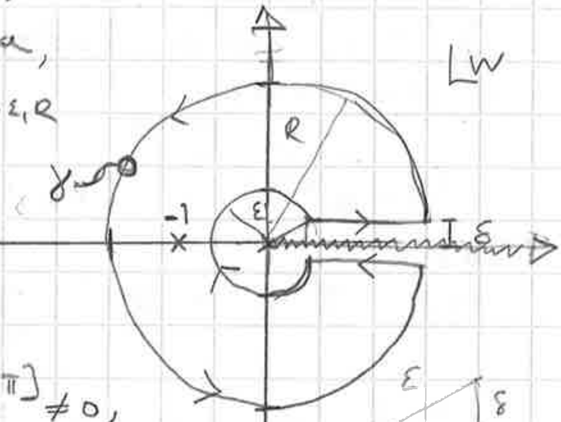
$$I(z) = \lim_{R\to\infty}\left(\lim_{\varepsilon\to 0^+}\left(\lim_{\delta\to 0^+} I_{\delta,\varepsilon,R}(z)\right)\right)$$

$$I_{\delta,\varepsilon,R}(z) = \int_{\varepsilon'}^{R'} f(x+i\delta)\,dx, \quad f(w) := \frac{e^{(z-1)[\overline{\ln}(-w)+i\pi]}}{1+w},$$

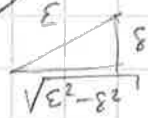
ja $\varepsilon' = \sqrt{\varepsilon^2-\delta^2}$, $R' = \sqrt{R^2-\delta^2}$. $\quad (\delta < \varepsilon < 1 < R)$

Integrandi on analyyttinen x:ssä, lukuunottamatta napaa $w=-1$ ja logaritmin valitun haaran hyppyä arvoilla $w>0$.

Residylauseen perusteella, kuvan 3.4. käyrälle $\gamma = \gamma_{\delta,\varepsilon,R}$ pätee siis



$$\oint_\gamma f(w)\,dw = 2\pi i \operatorname*{Res}_{w=-1} f(w).$$



Koska $(1+w)f(w) \to e^{(z-1)[\overline{\ln}1+i\pi]} \neq 0$,
kun $w\to -1$, on $w=-1$ f:n
1. kertaluvun napa ja $\operatorname*{Res}_{w=-1} f(w) = e^{i(z-1)\pi}$.

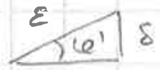
Toisaalta $\oint_\gamma f(x)\,dx = I_{\delta,\varepsilon,R} + J_1 + I' + J_2$,

jossa $I' = \int_{\leftarrow} f(w)\,dw = -\int_{\varepsilon'}^{R'} f(x-i\delta)\,dx$

ja koska $\overline{\ln}(-(x-i\delta)) + i\pi = \overline{\ln}(-x+i\delta)+i\pi \xrightarrow{\delta\to 0^+} \ln x + i2\pi$
nähdään, että $I_{\delta,\varepsilon,R} + I' \to (1-e^{i2\pi(z-1)})\,I(z)$,
kun $\delta,\varepsilon \to 0^+$ ja $R\to\infty$.

Toisaalta $J_1 = -\int_{C_\varepsilon} f(w)\,dw$ ja $J_2 = \int_{C_R} f(w)\,dw$

ovat eksplisiittisesti



$$J_1 = -\int_{\varphi'}^{2\pi-\varphi'} f(\varepsilon e^{i\varphi})\cdot \varepsilon e^{i\varphi} i\,d\varphi$$

ja $$J_2 = \int_{\varphi''}^{2\pi-\varphi''} f(Re^{i\varphi}) R e^{i\varphi} i\,d\varphi,$$

Koska $|f(\varepsilon e^{i\varphi})| = \dfrac{e^{(z-1)\mathrm{Re}[\overline{\ln}(-\varepsilon e^{i\varphi})]}}{|1+\varepsilon e^{i\varphi}|} \le \dfrac{e^{(z-1)\ln\varepsilon}}{1-\varepsilon}$

saadaan siis estimaatti $|J_1| \le \varepsilon^{1+z-1}\dfrac{1}{1-\varepsilon}\displaystyle\int_0^{2\pi} d\varphi$

$= \dfrac{\varepsilon^z}{1-\varepsilon}2\pi \to 0$ kun $\varepsilon \to 0^+$, sillä $z>0$.

Samoin nähdään $|J_2| \le \dfrac{R}{R-1} R^{z-1}\cdot 2\pi \to 0$

kun $R\to\infty$, sillä $z-1<0$. Näin ollen $J_1+J_2 \to 0$ tutkitulla rajalla, ja ollaan saatu tulos

$$\Big(1-\overbrace{e^{i2\pi(z-1)}}^{=e^{i2\pi z}}\Big) I(z) = 2\pi i\, \overbrace{e^{i\pi(z-1)}}^{=-e^{i\pi z}}, \quad \text{kun } 0<z<1.$$

$$\overset{z\notin\mathbb{Z}}{\Longrightarrow} \quad I(z) = 2\pi i \frac{-e^{i\pi z}}{1-e^{i2\pi z}} = 2\pi i \frac{-e^{i\pi z}\cdot e^{-i\pi z}}{e^{-i\pi z}-e^{i\pi z}}$$

$$= 2\pi i \frac{-1}{-2i\cdot\sin(\pi z)} = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}. \ \square$$