

- 1) Nämä ovat FYMM Ia -kurssin viimeiset laskarit. Ensi viikolla päivitetään luentomoniste lopulliseen asuunsa ja lisätään lista kokeeseen osallistumista varten riittävästi laskaripisteitä keränneistä.
- 2) Huomaa, että tällä kertaa **tarkastettavia tehtäviä on 4**, eli tehtävät 4–7. **On erittäin suositeltavaa tutustua monisteen Lukuun 3.4 (Residylaskenta) ennen laskujen aloittamista**, sillä tehtävät soveltavat pääasiassa sen esimerkkien tekniikoita.
- 3) Tehtävässä 3 on kaksi vaihtoehtoa, joista vain toisen ratkaisu otetaan huomioon pisteissä.
- 4) Kuten edellisvuosina, saa tälläkin kertaa **3 laskuharjoituslisäpistettä vastaamalla kurssipalautelomakkeeseen**. Linkki lomakkeeseen löytyy kurssin nettisivuilta.

### Tehtävä 1

Laske seuraavien funktioiden residyt origossa:

$$(a) \frac{1}{\sin(2z)}, \quad (b) \frac{z}{1 - \cos z}, \quad (c) \left(2z^2 - \frac{1}{3}\right) \sinh \frac{1}{z}.$$

### Tehtävä 2

Määritä ja luokittele funktion  $f(z) = \cot z - \frac{1}{z}$  eristetyt erikoispisteet. (Luokittelulla tarkoitetaan siis sen tutkimista, onko erikoispiste poistuva, oleellinen vai napa. Navan tapauksessa pitää ratkaista myös sen aste.)

### Tehtävä 3

Etsi funktion  $\sin z$  Maclaurinin sarja. Mikä on sen suppenemissäde?

### Vaihtoehtoinen tehtävä 3

Jos edellinen tehtävä tuntuu itsestään selvältä, laske sen sijasta integraali

$$\int_0^{\infty} \frac{x^a}{1+x^2} dx, \quad -1 < a < 1.$$

(*Vihje:* Kirjoita  $x^a = \exp(a \ln x)$  ja sovelta luentomonisteen Kuvan 1.5 kaltaista integrointikäyrää. Huomaa, että tätä varten pitää logaritmin haaran leikkaus valita kulkemaan positiivisella reaaliakselilla. Päähaaran avulla tämä saadaan aikaiseksi määrittelemällä  $\ln z = \overline{\ln(-z)} + i\pi$ .)

(Jatkuu...)

**Tehtävä 4 (tarkastettava tehtävä)**

Kehitä funktio  $f(z) = \frac{1}{(z-2)(z+3)}$  Laurentin sarjaksi pisteiden  $z_0 = 2$  ja  $z_0 = 0$  ympäristöissä, sekä renkaassa  $2 < |z| < 3$ . Määritä sarjan suppenemisalue kaikissa kolmessa tapauksessa ja päättele residyt  $\text{Res}(f, 2)$  sekä  $\text{Res}(f, 0)$ .

**Tehtävä 5**

Laske residylausetta käyttäen *pääarvointegraali*

$$\text{P.V.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x-1)(x^2+4)} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left( \int_{-\infty}^{1-\varepsilon} \frac{1}{(x-1)(x^2+4)} dx + \int_{1+\varepsilon}^{\infty} \frac{1}{(x-1)(x^2+4)} dx \right).$$

**Tehtävä 6**

Laske residylausetta ja Jordanin lemmaa käyttäen integraali

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 \cos x}{(x^2+1)^2} dx.$$

**Tehtävä 7**

Laske residylausetta käyttäen integraali

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{(a + \cos x)^2} dx, \quad a > 1.$$

(*Vihje:* Muuttujanvaihto  $z = e^{ix}$ .)